Daniel BREAZ
Nicolae SUCIU Păstorel GAŞPAR
Nicoleta BREAZ Monica PÎRVAN
Valeriu PREPELIŢĂ Gheorghe BARBU

Transformări integrale şi funcţii complexe cu aplicaţii în tehnică

Volumul 1

Funcţii complexe cu aplicaţii în tehnică

Prefaţă

Funcţii complexe cu aplicaţii în tehnică reprezintă un material destinat în special studenţilor de la specializările cu profil tehnic dar şi celor care doresc să înveţe cât mai rapid noţiunile de bază din analiza complexă.

Rezultatele prezentate în această carte sintetizează noţiunile necesare pentru pregătirea studenţilor, de cele mai mute ori fără a fi prezentate în detaliu şi fără a face demonstraţii riguroase sau greu accesibile.

Materialul este structurat în douăsprezece capitole, în unsprezece dintre acestea fiind prezentate noţiunile teoretice, iar în ultimul capitol fiind prezentate exerciţii şi probleme. Sunt prezentate în prima parte chestiuni generale despre numerele complexe, şiruri şi serii de numere complexe, funcţii complexe de o variabilă reală respectiv funcţii complexe de o variabilă complexă. Funcţiile olomorfe cunoscute ca funcţiile cu o largă aplicabilitate sunt prezentate în capitolul cinci. În capitolul şase sunt prezentate şiruri şi serii de funcţii dar şi seriile de puteri. Integrala complexă şi respectiv formula lui Cauchy cu aplicaţii ale ei reprezintă partea tratată în capitolele şapte şi opt. Prelungirea analitică respectiv puncte speciale pentru funcţiile analitice sunt prezentate în capitolele nouă şi zece. Capitolul unsprezece este dedicat teoremei generale a lui Cauchy dar şi teoremei reziduurilor, teoremă deosebit de importantă datorită aplicaţiilor sale. Problemele propuse încheie acest material. Printre acestea se găsesc şi probleme pentru care este prezentată ideea de rezolvare sau rezultatul care trebuie obţinut.

Sperăm ca acest material să reprezinte un bun ghid care să fie util studenţilor dar şi celor care doresc să înveţe analiza complexă.

Cartea de faţă a fost elaborată în cadrul proiectului POSDRU/56/1.2/S/32768, "Formarea cadrelor didactice universitare şi a studenţilor în domeniul utilizării unor instrumente moderne de predare-învăţare-evaluare pentru disciplinele matematice, în vederea creării de competenţe performante şi practice pentru piaţa muncii". Finanţat din Fondul Social European şi implementat de către Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului, în colaborare cu The Red Point, Oameni şi Companii, Universitatea din Bucureşti, Universitatea Tehnică de Construcţii din Bucureşti, Universitatea "Politehnica" din Bucureşti, Universitatea din Piteşti, Universitatea Tehnică "Gheorghe Asachi" din Iaşi, Universitatea de Vest din Timişoara, Universitatea "Dunărea de Jos" din Galaţi, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca, Universitatea "1 Decembrie 1918" din Alba-Iulia, proiectul contribuie în mod direct la realizarea obiectivului general al Programului Operaţional Sectorial de Dezvoltare a Resurselor Umane - POSDRU şi se înscrie în domeniul major de intervenţie 1.2 Calitate în învăţământul superior. Proiectul are ca obiectiv adaptarea programelor de studii ale disciplinelor

matematice la cerinţele pieţei muncii şi crearea de mecanisme şi instrumente de extindere a oportunităţilor de învăţare. Evaluarea nevoilor educaţionale obiective ale cadrelor didactice şi studenţilor legate de utilizarea matematicii în învăţământul superior, masterate şi doctorate precum şi analizarea eficacităţii şi relevanţei curriculelor actuale la nivel de performanţă şi eficienţă, în vederea dezvoltării de cunoştinţe şi competenţe pentru studenţii care învaţă discipline matematice în universităţi, reprezintă obiective specifice de interes în cadrul proiectului. Dezvoltarea şi armonizarea curriculelor universitare ale disciplinelor matematice, conform exigenţelor de pe piaţa muncii, elaborarea şi implementarea unui program de formare a cadrelor didactice şi a studenţilor interesaţi din universităţile partenere, bazat pe dezvoltarea şi armonizarea de curriculum, crearea unei baze de resurse inovative, moderne şi funcţionale pentru predarea-învăţarea-evaluarea în disciplinele matematice pentru învăţământul universitar sunt obiectivele specifice care au ca răspuns materialul de faţă. Formarea de competenţe cheie de matematică şi informatică presupune crearea de abilităţi de care fiecare individ are nevoie pentru dezvoltarea personală, incluziune socială şi inserţie pe piaţa muncii. Se poate constata însă că programele disciplinelor de matematică nu au întotdeauna în vedere identificarea şi sprijinirea elevilor şi studenţilor potenţial talentaţi la matematică. Totuşi, studiul matematicii a evoluat în exigenţe până a ajunge să accepte provocarea de a folosi noile tehnologii în procesul de predare-învăţare-evaluare pentru a face matematica mai atractivă. În acest context, analiza flexibilităţii curriculei, însoţită de analiza metodelor şi instrumentelor folosite pentru identificarea şi motivarea studenţilor talentaţi la matematică ar putea răspunde deopotrivă cerinţelor de masă, cât şi celor de elită. Viziunea pe termen lung a acestui proiect preconizează determinarea unor schimbări în abordarea fenomenului matematic pe mai multe planuri: informarea unui număr cât mai mare de membri ai societăţii în legătură cu rolul şi locul matematicii în educaţia de bază în instrucţie şi în descoperirile ştiinţifice menite să îmbunătăţească calitatea vieţii, inclusiv popularizarea unor mari descoperiri tehnice, şi nu numai, în care matematica cea mai avansată a jucat un rol hotărâtor. De asemenea, se urmăreşte evidenţierea a noi motivaţii solide pentru învăţarea şi studiul matematicii la nivelele de bază şi la nivel de performanţă; stimularea creativităţii şi formarea la viitorii cercetători matematicieni a unei atitudini deschise faţă de însuşirea aspectelor specifice din alte ştiinţe, în scopul participării cu succes în echipe mixte de cercetare sau a abordării unei cercetări inter şi multi disciplinare; identificarea unor forme de pregătire adecvată de matematică pentru viitorii studenţi ai disciplinelor matematice, în scopul utilizării la nivel de performanţă a aparatului matematic în construirea unei cariere profesionale.

Cuprins

Capitolul 1

Numere complexe

1.1 Corpul numerelor complexe. Forma algebrică şi forma trigonometrică a numerelor complexe

Considerăm mulţimea $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ pe care definim următoarea relaţie:

$$(x, y) = (x', y') \overset{def}{\Leftrightarrow} x = x' \text{ şi } y = y'.$$

Se observă că relaţia definită anterior este o relaţie de echivalenţă.
Definim de asemenea operaţia de adunare şi operaţia de înmulţire astfel:

$$(x, y) + (x', y') \overset{def}{=} (x + x', y + y').$$

$$(x, y) \cdot (x', y') \overset{def}{=} (xx' - yy', xy' + x'y).$$

Relaţia de echivalenţă mai sus definită împarte mulţimea numerelor reale în clase de echivalenţă, fiecare clasă fiind formată dintr-o singură pereche, pe care o vom nota:

$$(x, y) \overset{def}{=} z.$$

Astfel mulţimea $\mathbb{R}$ împreună cu operaţiile definite mai sus se numeşte mulţimea numerelor complexe pe care o vom nota cu $\mathbb{C}$.

Propoziţia 1.1.1. *Mulţimea numerelor complexe împreună cu operaţiile de adunare şi înmulţire definite mai sus formează un corp comutativ.*

Demonstraţie. Din proprietăţile operaţiilor de adunare şi înmulţire pentru numere reale rezultă imediat că operaţiile introduse în $\mathbb{C}$ sunt comutative, asociative, înmulţirea este distributivă faţă de adunare. Elementele $(0, 0)$ şi

$(1,0)$ sunt elemente neutre pentru adunare respectiv înmulţire, $(-x,-y)$ este opusul lui (x,y) pentru că $(x,y)+(-x,-y)=(0,0)$. Opusul elementului $z=(x,y)$ se notează cu $-z$.

De asemenea, orice element $z\in\mathbb{C}^*$ are invers, deoarece ecuaţia $(x,y)(x_1,y_1)=(1,0)$ cu $(x,y)\neq(0,0)$ este echivalentă cu sistemul compatibil în x_1 şi y_1:

$$\begin{cases} xx_1-yy_1=1\\ yx_1+xy_1=0.\end{cases}$$

Rezolvând sistemul de mai sus obţinem că inversul lui $z\in\mathbb{C}^*$ este

$$(x_1,y_1)=\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{-y}{x^2+y^2}\right)\in\mathbb{C}^*.$$

Scăderea numerelor complexe se defineşte prin adunarea cu element opus:

$$z-z'\overset{def}{=}z+(-z')=(x,y)+(-x',-y')=(x-x',y-y')$$

pentru orice $z=(x,y)\in\mathbb{C}$ şi $z'=(x',y')\in\mathbb{C}$.

Împărţirea numerelor complexe se defineşte prin înmulţirea cu elementul invers:

$$z:z'=\frac{z}{z'}=z(z')^{-1}=(x,y)(x',y')^{-1}=(x,y)\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{-y}{x^2+y^2}\right)=$$

$$\left(\frac{xx'+yy'}{x'^2+y'^2},\frac{x'y-xy'}{x'^2+y'^2}\right)$$

pentru orice $z'\neq(0,0)$.

De asemenea se poate defini şi o operaţie de înmulţire cu scalari reali:

$$\lambda z=\lambda(x,y)\overset{def}{=}(\lambda x,\lambda y)$$

unde $\lambda\in\mathbb{R}$, $z\in\mathbb{C}$.

Mulţimea $\mathbb{C}$ la care se adaugă simbolul ∞, definit $\infty=(x,y)$ în care cel puţin una dintre componente este infinită o vom nota cu $\mathbb{C}_\infty=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ şi o vom numi planul complex extins.

Teoria numerelor complexe are un caracter mai abstract, mai formal decât teoria numerelor reale deoarece numerele complexe nu reprezintă rezultatul unor măsurători. Teoria numerelor complexe, datorită implicaţiilor sale, are multiple aplicaţii practice.

Vom nota cu $0 \overset{not}{=} (0,0)$ elementul neutru faţă de adunare şi cu $1 \overset{not}{=} (1,0)$ elementul neutru faţă de înmuţire. Numim unitate imaginară $(0,1) \overset{not}{=} i \in \mathbb{C}$.

Propoziţia 1.1.2. *Mulţimea $\mathbb{R} \times \{0\} = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$ dotată cu operaţiile din $\mathbb{C}$ este un subcorp al lui $\mathbb{C}$ iar aplicaţia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \{0\}$, unde $\varphi(x) = (x,0)$, este un izomorfism de corpuri.*

Observaţie. Deoarece $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, avem şirul de incluziuni $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, deci toate numerele sunt şi numere complexe.

Propoziţia 1.1.3. *Orice număr complex $z = (x,y)$ poate fi reprezentat în mod unic în forma $x + iy$, unde $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, iar $i \in \mathbb{C}$ şi $i^2 = -1$.*

Demonstraţie. Conform notaţiilor avem $z = (x,y) = (x,0) + (0,y) = x(1,0) + y(0,1) = x + iy$. Expresia de mai sus $x + iy$ se numeşte forma algebrică a numărului complex (x,y). Avem $i^2 = -1$, $i^n = 1$ dacă $n = 4k$, $i^n = i$ dacă $n = 4k+1$, $i^n = -1$ dacă $n = 4k+2$, $i^n = -i$ dacă $n = 4k+3$, unde k este număr natural.

În continuare notăm $\mathrm{Re}z = x$ partea reală şi respectiv $\mathrm{Im}z = y$ partea imaginară a numărului complex z. Raportăm planul euclidian bidimensional la un sistem de axe rectangulare Ox şi Oy numite axa reală respectiv axa imaginară. Numărului complex $z = x + iy$ facem să-i corespundă în plan punctul de coordonate carteziene (x,y). Reciproc, punctului (x,y) îi va corespunde numărul complex $z = x + iy$. Punctul (x,y) din plan se va numi imaginea geometrică a numărului complex z. În acest fel se stabileşte o bijecţie între corpul numerelor complexe şi planul euclidian, aspect care ne permite să identificăm pe mulţimea numerelor complexe cu acest plan. Numerele complexe pot fi reprezentate şi vectorial altfel: oricărui număr complex z i se poate ataşa vectorul liber cu componentele x şi respectiv y pe axele de coordonate.

Definiţia 1.1.4. *Modulul unui număr complex z reprezintă lungimea vectorului ce corespunde acestui număr complex şi se notează $|z|$.*

Definiţia 1.1.5. *Argumentul unui număr complex z, diferit de zero, reprezintă unghiul făcut de vectorul corespunzător lui z cu sensul pozitiv al axei reale.*

Observaţii. 1. Aceluiaşi număr complex z, nenul, îi corespund o infinitate de determinări ale argumentului, care diferă între ele printr-un multiplu de 2π. Clasa tuturor acestor determinări le vom nota cu $\mathrm{Arg}z$.

2. Numim determinare principală a argumentului z, nenul, şi o notăm cu $\arg z$, acea determinare care verifică inegalităţile $-\pi < \arg z < \pi$. În acest fel putem vorbi de o funcţie şi anume funcţia $z \to \arg z$ definită pe $\mathbb{C} - \{0\}$ cu valori în $(-\pi, \pi]$.

3.Determinarea principală poate fi aleasă şi în intervalul $[0, 2\pi)$.

4. Având în vedere faptul că $z = x + iy$ atunci $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Notând cu θ argumentul lui z, avem că $\mathrm{tg}\theta = \frac{y}{x}$ şi $\mathrm{Arg}z = \mathrm{arctg}\frac{y}{x} + 2k\pi$ în cadranele I şi IV, respectiv $\mathrm{Arg}z = \mathrm{arctg}\frac{y}{x} + (2k+1)\pi$ în cadranele II şi III. De asemenea, avem $x = |z|\cos\theta$, $y = |z|\sin\theta$ şi numărul complex z se poate scrie $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$, această formulă reprezentând forma trigonometrică a numărului complex z.

1.2 Operaţii cu numere complexe

Definiţia 1.2.1. *Pentru numărul complex $z = x + iy$ numărul complex $\bar{z} = x - iy$ se va numi conjugatul numărului complex z.*

Observaţie. Numărul complex şi respectiv conjugatul său sunt simetrice în raport cu axa reală. Avem de asemenea $z = \bar{\bar{z}}$.

Definiţia 1.2.2. *Pentru $z = x + iy$, numărul complex $-z = -x - iy$ se numeşte opus numărului complex z. Numerele complexe z, $-z$ sunt simetrice faţă de origine.*

Propoziţia 1.2.3. *Oricare ar fi numerele complexe z_1, z_2, z_3 avem adevărate următoarele proprietăţi:*

1. $\mathrm{Re}z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$
2. $\mathrm{Im}z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$
3. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ şi $\bar{\bar{z}} = z$.
4. $-|z| \leq \mathrm{Re}z \leq |z|$ şi $-|z| \leq \mathrm{Im} \leq |z|$, $|\bar{z}| = |z|$.
5. $|z|^2 = z\bar{z}$ şi $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$, dacă $z \neq 0$.
6. $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0, |z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.
7. $\overline{z_1 + z_2 + ... + z_n} = \overline{z_1} + \overline{z_2} + ... + \overline{z_n}$.
8. $\overline{z_1 \cdot z_2 \cdot ... \cdot z_n} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \cdot ... \cdot \overline{z_n}$.
9. $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ pentru $z_2 \neq 0$.
10. $|z_1 \cdot z_2 \cdot ... \cdot z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot ... \cdot |z_n|$.
11. $|z_1 + z_2 + ... + z_n| = |z_1| + |z_2| + ... + |z_n|$.
12. $|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 - 2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2$.
13. $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$.
14. $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$.
15. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ pentru $z_2 \neq 0$.

Observaţie. Proprietăţile enumerate mai sus sunt deosebit de importante în rezolvarea unor probleme diverse în matematică.

Observaţie. Dacă x este un număr real, atunci au loc următoarele dezvoltări în serie:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ...$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...$$
$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...$$

Printr-o înlocuire formală $x = it$, $t \in \mathbb{R}$ în expresia lui e^x obţinem:

$$e^{it} = 1\frac{it}{1!} + \frac{(it)^2}{2!} + \frac{(it)^3}{3!} + \frac{(it)^4}{4!} + \frac{(it)^5}{5!} + \frac{(it)^6}{6!} + ... =$$
$$= 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + ... + i\left(\frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} - \frac{t^5}{5!} - ...\right) = \cos t + i \sin t.$$

care este relaţia lui Euler.

Folosind reprezentarea trigonometrică, a numerelor complexe $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$, obţinem că forma exponenţială a numărului complex z este

$$z = |z|\, e^{i\, arg\, z}.$$

I.*Adunarea şi scăderea*

Dacă numerele sunt reprezentate în forma algebrică, $z_1 = x_1 + iy_1$ şi respectiv $z_2 = x_2 + iy_2$, atunci: $z_1 \pm z_2 = x_1 \pm x_2 + i(y_1 \pm y_2)$.

Observaţii. 1. Dacă numerele sunt reprezentate sub formă trigonometrică pentru a efectua adunarea sau scăderea lor este preferabil să le aducem mai întâi la forma algebrică şi apoi să efectuăm suma.

2. Aceste operaţii au ca semnificaţie geometrică adunarea respectiv scăderea vectorilor corespunzători numerelor complexe.

3. Se observă, că $|z_1 - z_2|$ reprezintă distanţa dintre punctele z_1 şi z_2.

4. Ultima inegalitate din proprietatea 6 din Propoziţiei 1.2.3 se deduce imediat folosind proprietatea că o latură a unui triunghi este mai mică sau cel mult egală cu suma celorlalte două laturi.

5. Folosind proprietatea că o latură a unui triunghi este mai mare sau cel mult egală cu diferenţa celorlalte două laturi obţinem: $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$.

II. *Înmulţirea şi împărţirea*

Dacă numerele sunt reprezentate sub formă algebrică $z_1 = x_1 + iy_1$ respectiv $z_2 = x_2 + iy_2$, atunci:

-pentru înmulţire se procedează ca la înmulţirea polinoamelor dar se ţine cont de puterile lui i.

$$z_1 : z_2 = (x_1 + iy_2)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_2y_1 + x_1y_2).$$

-pentru împărţire se utilizează amplificarea cu $\overline{z_2}$:

$$z_1 : z_2 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Dacă numerele sunt reprezentate sub forma exponenţială

$$z_1 = |z_1|\, e^{i\theta_1},\ z_2 = |z_2|\, e^{i\theta_2}$$

atunci:

$$z_1z_2 = |z_1|\, e^{i\theta_1}\, |z_2|\, e^{i\theta_2} = |z_1| \cdot |z_2|\, e^{i(\theta_1+\theta_2)};$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|\, e^{i\theta_1}}{|z_2|\, e^{i\theta_2}} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\theta_1-\theta_2)}.$$

Dacă numerele sunt reprezentate sub formă trigonometrică atunci:

$$z_1z_2 = |z_1|\,(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \cdot |z_2|\,(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

$$|z_1| \cdot |z_2|\, [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]\,.$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\, [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]\,.$$

Folosind inducţia matematică se poate deduce regula de înmulţire a unui număr finit de numere complexe:

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \ldots \cdot |z_n|\, [\cos(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n) + i\sin(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n)]\,.$$

III. *Ridicarea la putere naturală*

Deoarece ridicarea la putere naturală este considerată ca fiind o înmulţire repetată, avem:

a)pentru forma algebrică

$$z^n = (x + iy)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} y^k i^k.$$

b)pentru forma exponenţială

$$z^n = \left[|z|\, e^{i\theta}\right]^n = |z|^n\, e^{in\theta}.$$

c)pentru forma trigonometrică

$$z^n = \left[|z|\,(\cos\theta + i\sin\theta)\right]^n = |z|^n \left[\cos n\theta + i\sin n\theta\right].$$

Dacă $|z| = 1$ obţinem:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

care se numeşte formula lui Moivre.

Radicalul de ordinul n dintr-un număr complex z este un număr complex w care ridicat la puterea n este z, deci w va fi soluţia ecuaţiei: $w^n = z$. Pentru a găsi pe w să scriem $z = |z|\,(\cos\theta + i\sin\theta)$, presupunând că $z \neq 0$, şi $w = |w|\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Astfel trebuie să avem

$$|w|^n = |w|\,(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = |z|\,(\cos\theta + i\sin\theta)$$

de unde $|w|^n = |z|$, $n\varphi = \theta + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Deci $|w| = \sqrt[n]{|z|}$ înţelegând aici rădăcina de ordinul n a numărului real pozitiv r, iar $\varphi = \frac{\theta+2k\pi}{n}$.

Astfel am obţinut mulţimea rădăcinilor de ordinul n ale lui z care este de forma:

$$w_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right),\ k \in \mathbb{Z}.$$

Pentru a vedea câte valori ale argumentului φ sunt distincte, vom împărţi pe k la n scriind $k = nq + r$ unde $0 \leq r \leq n-1$.

În aceste condiţii obţinem că:

$$\varphi = \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi(nq+r)}{n} = \frac{\theta + 2\pi r}{n} + 2\pi q.$$

Rezultă că valorile distincte pentru φ sunt:

$$\varphi_k = \frac{\theta + 2k\pi}{n}, k = 0, 1, 2, ..., (n-1).$$

Astfel ecuaţia $w^n = z$, pentru $z \neq 0$, are n rădăcini distincte date de

$$w_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) =$$

$$= \sqrt[n]{|z|}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)\right]=$$
$$= \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\theta}{n}+i\sin\frac{\theta}{n}\right)\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right).$$

Notând $\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$, $k = 0, 1, 2, ..., (n-1)$ mai putem scrie

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta}{n}+i\sin\frac{\theta}{n}\right)\varepsilon.$$

Numerele ε_k sunt rădăcinile de ordinul n ale unităţii. Din punct de vedere geometric, cele n rădăcini ale lui z sunt vârfurile unui poligon regulat cu n laturi înscris în cercul cu centrul în origine şi de rază $\sqrt[n]{r}$.

1.3 Drum continuu în mulţimea numerelor complexe

Definiţia 1.3.1.*Printr-un drum continuu în mulţimea numerelor complexe $\mathbb{C}$ vom înţelege o aplicaţie continuă: $\gamma : I \to \mathbb{C}$ unde $I = [a, b]$ este un interval compact al axei reale.*

Observaţii. 1. Sunt destul de dese cazurile când, printr-un abuz de notaţie, vom scrie $\gamma = \gamma(t)$, aceasta reprezentând imaginea intervalului I prin aplicaţia γ, care se mai numeşte şi suportul drumului γ. Când parametrul t descrie intervalul I, punctul $z = \gamma(t)$ sau $z = z(t) = x(t) + iy(t)$ descrie suportul γ. Se poate folosi şi notaţia $\gamma : z = z(t), t \in [a, b]$.

2. Punctele $\gamma(a)$ şi $\gamma(b)$ se numesc extremităţile drumului γ. Drumul γ este închis dacă $\gamma(a) = \gamma(b)$. Vom spune că drumul γ este situat în mulţimea A dacă $\gamma(I) \subset A$.

Definiţia 1.3.1.*Drumurile γ_1 şi γ_2, având ca intervale de definiţie pe $[a_1, b_1]$ respectiv $[a_2, b_2]$, sunt echivalente dacă există o aplicaţie continuă crescătoare surjectivă $\varphi : [a_1, b_1] \to [a_2, b_2]$, astfel încât $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \varphi$.*

Capitolul 2

Şiruri şi serii de numere complexe

2.1 Definiţii şi notaţii

Definiţia 2.1.1. *Considerăm* $a \in \mathbb{C}$ *un punct fix din planul complex,* $a \neq \infty$ *şi* r *număr real pozitiv. Se numeşte cerc de rază* r *şi centru* a *mulţimea notată cu* $C_r(a) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| = r\}$.

Definiţia 2.1.2. *Se numeşte disc deschis de rază* r *şi centru* a *mulţimea* $U(a; r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$. *Vom nota cu* $U^{\bullet}(a; r) = U(a; r) - \{a\}$ *discul punctat de centru* a *de rază* r.

Definiţia 2.1.3. *Se numeşte disc închis de rază* r *şi centru* a *mulţimea* $\overline{U}(a; r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| \leq r\}$.

Definiţia 2.1.4. *Se numeşte coroană circulară cu centrul în* a *şi de raze* r_1 *şi* r_2 *mulţimea* $U(a; r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - a| < r_2\}$.

Definiţia 2.1.5. *Se numeşte vecinătate a unui punct* $a \in \mathbb{C}$ *orice mulţime* V_a *care conţine un disc deschis* $U(a, r) \subset V_a$. *Se numeşte vecinătate a punctului* ∞, *orice mulţime deschisă* $U(\infty; r) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > r, r \in \mathbb{R}\}$.

O vecinătate redusă a punctului $a \in \mathbb{C}$ va fi o vecinătate care nu conţine punctul a. Notăm această vecinătate cu $\overline{V}(a) = V_a - \{a\}$.

Definiţia 2.1.6. *O submulţime* $G \subset \mathbb{C}$ *se numeşte deschisă dacă este vidă sau, în caz contrar, oricare ar fi* $z_0 \in \mathbb{C}$ *există un disc* $U(a; r) \subset G$. *Evident* $\mathbb{C}$ *şi orice disc sunt mulţimi deschise.*

Definiţia 2.1.7. *O submulţime* $M \subset \mathbb{C}$ *se numeşte închisă dacă este complementara unei mulţimi deschise.*

Observaţii. 1. Deoarece $\mathbb{C}$ este complementara lui $\emptyset$ şi $\emptyset$ este complemen-

tara lui $\mathbb{C}$ se obţine că $\mathbb{C}$ şi $\emptyset$ sunt şi închise.
2.Orice reuniune de mulţimi deschise este deschisă, orice intersecţie finită de mulţimi deschise este deschisă, deci familia mulţimilor deschise este o topologie pe $\mathbb{C}$. Această topologie este indusă de metrica $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$.

Definiţia 2.1.8. *Submulţimea M a lui $\mathbb{C}$ se numeşte finită dacă putem număra număra punctele sale, asociind apoi un număr natural elementelor pe care le conţine. În caz contrar mulţimea M este infinită.*

Definiţia 2.1.9. *O submulţime M a lui $\mathbb{C}$ este mărginită dacă există un cerc în planul complex care să conţină în interiorul său toate punctele submulţimii M. Altfel, submulţimea M e nemărginită.*

Definiţia 2.1.10. *Fie M o mulţime de puncte din plan. Un punct a al planului care poate să aparţină sau să nu aparţină mulţimii M se numeşte punct de acumulare al mulţimii M dacă în oricare cerc cu centrul în a avem puncte ale mulţimii M diferite de punctul a. Se observă că în oricare cerc cu centrul în a avem o infinitate de puncte din M.*

Observaţii. 1. O mulţime finită nu are nici un punct de acumulare.
2.Mulţimea punctelor de acumulare ale mulţimii A se numeşte derivata mulţimii A şi se notează A'.

Definiţia 2.1.11. *Un punct $z_0 \in \mathbb{C}$ se numeşte punct aderent pentru mulţimea $A \subset \mathbb{C}$ dacă pentru orice disc $U(z_0; r)$ avem $U(z_0; r) \cap A \neq \emptyset$. Mulţimea punctelor de aderenţă a mulţimii A se numeşte aderenta sau închiderea lui A şi se notează cu $\overline{A}$.*

Definiţia 2.1.12. *Un punct $z_0 \in \mathbb{C}$ se numeşte punct frontieră pentru $A \subset \mathbb{C}$ dacă pentru orice $U(z_0, r)$ avem $U(z_0; r) \cap A \neq \emptyset$ şi $U(z_0; r) \cap CA \neq \emptyset$. Mulţimea punctelor frontieră ale mulţimii A se numeşte frontiera mulţimii A şi se notează cu ∂A.*

2.2 Şiruri de numere complexe

Definiţia 2.2.1. *Se numeşte şir de numere complexe orice aplicaţie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$. Notăm $f(n) = z_n \in \mathbb{C}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$. Un şir de numere complexe se va scrie $z_0, z_1, ..., z_n, ...$ sau prescurtat (z_n).*

Definiţia 2.2.2. *Spunem că şirul (z_n) este convergent şi are limita a dacă în orice vecinătate a lui a se găsesc toţi termenii şirului, cu excepţia eventual a unui număr finit. Vom scrie $a = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$ sau $z_n \to a$.*

Considerând ca vecinătate arbitrară $D_\varepsilon(a)$, $\varepsilon > 0$ se constată că definiţia de mai sus este echivalentă cu următoarea:

Şirul (z_n) este convergent şi are limita a dacă oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $N(\varepsilon)$, astfel ca $n > N(\varepsilon) \Rightarrow |z_n - a| < \varepsilon$, adică începând de la un rang suficient de mare toţi termenii se găsesc în discul $D_\varepsilon(a)$.

Definiţia 2.2.3. *Un şir de numere complexe (z_n) este mărginit dacă există un număr pozitiv L astfel încât toţi termenii şirului să verifice inegalitatea $|z_n| < L$.*

Observaţie. Având în vedere definiţia de mai sus se observă că orice şir convergent este mărginit.

Definiţia 2.2.4. *Şirul (z_n) se numeşte fundamental dacă oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât oricare ar fi $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m \geq N(\varepsilon)$ să avem $|z_n - z_m| < \varepsilon$.*

Definiţia 2.2.5 *Un punct $a \in \mathbb{C}$ se numeşte punct limită al şirului (z_n) dacă în orice vecinătate a lui a se găsesc o infinitate de termeni ai şirului.*

Observaţie. Teorema lui Bolzano-Weierstrass ne asigură că orice şir mărginit are cel puţin un punct limită. Putem considera ca exemplu şirul $1, i, 1, i, ..., 1, i, ...$ care are două puncte limită 1 şi i.

Teorema 2.2.6. *Şirul (z_n) este convergent şi are limita z_0 dacă şi numai dacă el este mărginit şi admite pe z_0 ca unic punct limită.*

Teorema 2.2.7. *Dacă z_0 reprezintă un punct limită pentru şirul (z_n), atunci există un subşir al său notat cu (z_{n_k}) care este convergent şi are limita z_0.*

Demonstraţie. Considerăm şirul de discuri $D_{\frac{1}{k}}(a)$, $k = 1, 2, 3, ...$. În fiecare disc putem alege un termen (z_{n_k}) al şirului dat. În felul acesta am construit şirul (x_{n_k}) extras din (z_n), care converge către z_0. Deci oricare ar fi $\varepsilon > 0$, putem lua $n(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}$ astfel încât pentru $K > N(\varepsilon)$ să avem $|z_{n_k} - z_0| < \frac{1}{k} < \varepsilon$.

Observaţie. Din orice şir mărginit se poate extrage un subşir convergent.

Teorema 2.2.8. *O condiţie necesară şi suficientă ca un şir de numere complexe z_n să fie convergent este ca, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, să existe $N(\varepsilon)$ astfel încât $n > N(\varepsilon)$* şi *$p \in \mathbb{N} \Rightarrow |z_{n+p} - z_n| < \varepsilon$.*

Considerăm şirul de numere complexe (z_n) şi scriem $z_n = x_n + iy_n$, unde x_n este partea reală iar y_n partea imaginară a sa.

Teorema 2.2.9. *Dacă şirul (z_n) este convergent şi are limita $a = \alpha + i\beta$, atunci şirurile de numere reale (x_n) şi (y_n) sunt convergente şi au limita $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{Re}\ z_n$ şi $\beta = \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{Im}\ z_n$. Reciproc dacă $x_n \to \alpha$ şi $y_n \to \beta$ atunci $z_n \to z = \alpha + i\beta$.*

Teorema 2.2.10. *Dacă şirul (z_n) este convergent şi are limită $a = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, atunci $|z_n| \to \rho$, iar dacă în plus a $a \neq 0$ atunci şi $\theta_n \to \varphi$,* *pentru o alegere convenabilă a lui θ_n şi ρ. Reciproca este adevărată.*

Demonstraţie. Considerând $z_n = x_n + iy_n$ avem că $r_n = \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$ şi respectiv $\theta_n = \frac{y_n}{x_n}$. Având în vedere cele de mai sus avem că $z_n \to a \Rightarrow |z_n| \to |a|$. Dacă $a \neq 0$, avem $z_n \to a \Rightarrow \text{Arg } z_n \to \text{Arg } a$. Reciproc: $|z_n| \to \rho$ şi Arg $z_n \to \varphi \Rightarrow z_n \to \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

2.3 Serii de numere complexe

Definiţia 2.3.1. *Fie (a_n) un şir cu elemente din $\mathbb{C}$ şi*

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} a_i, n \geq 0.$$

Perechea $((a_n), n \geq 0, (s_n), n \geq 0)$ se numeşte serie de numere complexe cu termenul general a_n şi se notează $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$, $\sum\limits_{n} a_n$ sau $\sum\limits_{n\geq 0}^{\infty} a_n$ sau $a_0 + a_1 + ... + a_n + ...$

Elementele şirului $(a_n)_{n\geq 0}$ se numesc termenii seriei, iar elementele şirului $(s_n)_{n\geq 0}$ se numesc sumele parţiale ale seriei, elementul a_n (respectiv s_n) se numeşte termenul (respectiv suma) de rang n a seriei date; seria asociată şirului $(a_k)_{k\geq n+1}$, adică seria $a_{n+1} + a_{n+2} + ...$ se numeşte restul de rang n a seriei date şi se notează cu $\sum\limits_{i\geq n+1} a_i$ sau $\sum\limits_{i\geq 1} a_{n+i}$.

Definiţia 2.3.2. *O serie de numere complexe $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ se numeşte convergentă dacă şirul sumelor parţiale $(s_n)_{n\geq 0}$ este convergent.*

În caz de convergenţă, limita S a şirului (s_n) se numeşte suma seriei $\sum a_n$ şi vom scrie $s = a_0 + a_1 + ... + a_n + ...$ sau $s = \sum\limits_{n\geq 0} u_n$.

Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$ vom spune că suma seriei date este egală cu $+\infty$. O serie care nu este convergentă se numeşte divergentă. Dacă $s = +\infty$ sau şirul sumelor parţiale nu are limită vom spune de asemenea că seria este divergentă.

Astfel criteriul lui Cauchy în cazul seriilor de numere complexe se formulează în modul următor:

O condiţie necesară şi suficientă ca seria $\sum a_n$ să fie convergentă este ca pentru orice $\varepsilon > 0$ să existe un $N(\varepsilon)$ astfel încât $n > N(\varepsilon)$ şi *$p \in \mathbb{N} \Rightarrow |a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{n+p}| < \varepsilon$.*

Făcând $p = 1$, rezultă că, pentru ca seria $\sum a_n$ să fie convergentă, este necesar ca termenul general să tindă la 0.

Fie seria $\sum a_n$ şi notăm cu $a'_n = \text{Re } a_n$ respectiv cu $a''_n = \text{Im } a_n$.

Teorema 2.3.3.*Seria $\sum a_n$ este convergentă şi are suma $s = s' + is''$ dacă şi numai dacă seriile de numere reale $\sum a'_n$ şi $\sum a''_n$ sunt convergente şi au respectiv sumele s' şi s''.*

Observaţie. Aceasta rezultă imediat scriind $s_n = s'_n + is''_n$ şi folosind proprietatea analoagă de la şiruri.

Definiţia 2.3.4.*Seria $a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$ se numeşte absolut convergentă dacă seria valorilor absolute: $|a_0| + |a_1| + |a_2| + ... + |a_n| + ...$ este convergentă.*

O serie absolut convergentă se bucură de următoarele proprietăţi:

1.Orice serie absolut convergentă este convergentă.

Acest lucru se poate vedea imediat din inegalitatea

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + ... + |a_{n+p}|$$

Dacă seria $\sum |a_n|$ este convergentă, atunci oricare ar fi $\varepsilon > 0$ putem determina un $N(\varepsilon)$ astfel încât: $|a_{n+1}| + ... + |a_{n+p}| < \varepsilon$ pentru $n > N(\varepsilon)$ şi $p \in \mathbb{N}$.

Având în vedere inegalitatea din propoziţia anterioară rezultă că $|a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{n+p}| \leq \varepsilon$ deci seria $\sum a_n$ este convergentă.

2.Seria $\sum a_n$ este absolut convergentă dacă şi numai dacă seriile $\sum a'_n$ şi $\sum a''_n$ sunt absolut convergente. Acest lucru rezultă imediat din inegalităţile următoare după care aplicăm criteriul comparaţiei:

$$|a'_n| \leq |a_n|\,,\ |a''_n| \leq |a_n|$$

şi

$$|a_n| \leq |a'_n| + |a''_n|\,.$$

3.Într-o serie absolut convergentă se poate schimba ordinea de însumare a termenilor fără ca natura şi suma seriei să se schimbe.

Considerăm următoarele serii convergente $A = \sum a_n$ respectiv $B = \sum b_n$. Analog cu cazul seriilor cu termeni reali, avem: $pA + qB = \sum(pa_n + qb_n)$, unde $p, q \in \mathbb{C}$ ceea ce rezultă uşor, considerând şirurile sumelor parţiale. De asemenea, ca şi la seriile cu termeni reali, dacă seriile $\sum a_n$ şi $\sum b_n$ sunt convergente, având respectiv sumele A şi B, iar cel puţin una dintre aceste serii este absolut convergentă, atunci seria produs $\sum(a_0b_n + a_1b_{n-1} + ... + a_nb_0)$ este convergentă şi are suma $A \cdot B$.

Capitolul 3

Funcţii complexe de o variabilă reală. Generalităţi

Definiţia 3.1.1. *Fie D o submulţime oarecare din $\mathbb{R}$, diferită de mulţimea vidă. Orice funcţie definită pe D cu valori în $\mathbb{C}$ se numeşte funcţie complexă de o variabilă reală.*

Observaţie. În general D este un interval sau o reuniune de intervale ale dreptei reale.

Valoarea funcţiei f într-un punct $t \in D$, arbitrar, se notează cu $f(t)$. Datorită faptului că $f(t) \in \mathbb{C}$ putem considera descompunerea $f(t) = f_1(t) + if_2(t)$. Definim astfel două funcţii reale $f_1(t) = \mathrm{Re} f(t)$, $f_2(t) = \mathrm{Im} f(t)$ şi astfel putem scrie $f = f_1 + if_2$.

Definiţia 3.1.2. *Fie $f : D \to \mathbb{C}$ şi $t_0 \in D$ un punct de acumulare al mulţimii D. Funcţia $f = f_1 + if_2$ are limită în t_0 dacă şi numai dacă f_1 şi f_2 au limite în acest punct. În acest caz vom scrie*

$$\lim_{t \to t_0,\, t \in D} f(t) = \lim_{t \to t_0,\, t \in D} f_1(t) + i \lim_{t \to t_0,\, t \in D} f_2(t).$$

Definiţia 3.1.3. *Fie $f : D \to \mathbb{C}$ şi $t_0 \in D$ un punct de acumulare al mulţimii D. O funcţie $f : D \to \mathbb{C}$ este continuă în t_0 dacă şi numai dacă sunt îndeplinite următoarele condiţii:*
1. f are limită în acest punct;
2. $\lim_{t \to t_0,\, t \in D} f(t) = f(t_0)$.

Definiţia 3.1.4. *Fie $f : D \to \mathbb{C}$ şi $t_0 \in D$ un punct interior lui D. Notăm cu $I = D - \{t_0\}$ şi formăm funcţia*

$$\rho(t) = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

unde $t_0 \notin I$, dar este un punct de acumulare.

Spunem că funcţia f este derivabilă în punctul $t_0 \in D$ dacă limita funcţiei ρ în punctul t_0 există şi este finită. Dacă ea există şi este finită ea se notează

$$f'(t_0) = \lim_{t \to t_0,\, t_0 \in I} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

Dacă $f = f_1 + if_2$, este derivabilă într-un punct $t_0 \in I$ dacă şi numai dacă f_1 şi f_2 sunt derivabile în t_0

$$f'(t_0) = f_1'(t_0) + if_2'(t_0).$$

Observaţie. Dacă f este derivabilă într-un punct atunci ea este continuă în acel punct.

Spunem că f este diferenţiabilă în punctul $t_0 \in D$ dacă şi numai dacă f_1 şi f_2 sunt diferenţiabile în acel punct. Are loc relaţia

$$df(t_0) = df_1(t_0) + idf_2(t_0)$$

deoarece funcţiile reale f_1 şi f_2 sunt diferenţiabile dacă şi numai dacă sunt derivabile în acest punct.

Dacă notăm $dt = t - t_0 = h$ avem

$$df(t_0) = f'(t_0)dt.$$

Considerăm $I, J \subset \mathbb{R}$, două intervale deschise. Dacă $\varphi : I \to J$ este derivabilă într-un punct $t_0 \in I$ şi dacă $f : J \to \mathbb{C}$ este derivabilă în punctul $\tau_0 = \varphi(t_0)$, atunci funcţia $f \circ \varphi = g : I \to \mathbb{C}$ este derivabilă în t_0. În plus

$$g'(t_0) = f'(\tau_0)\varphi'(t_0) = f'(\varphi(t_0))\varphi'(t_0)$$

Observaţie. Spunem că f este derivabilă pe I dacă ea este derivabilă în orice punct al lui I.

Dacă f este derivabilă pe f se poate defini o nouă funcţie $f' : I \to \mathbb{C}$ care are valorile $f'(t)$, oricare ar fi $t \in I$. Dacă f' este derivabilă pe I se defineşte analog funcţia $f'' : I \to \mathbb{C}$ care are valorile $f''(t)$, oricare ar fi $t \in I$.

Definiţia 3.1.5. *Dacă f este continuă pe I vom spune că f este de clasă C^0 pe I şi vom scrie $f \in C^0(I)$. Dacă f şi derivatele sale până la ordinul*

p inclusiv sunt continue pe I, spunem că f este de clasă C^p pe I şi se scrie $f \in C^p(I)$.

Considerăm $f = f_1 + if_2$ o funcţie complexă definită pe un interval compact $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$. Vom spune că f este integrabilă Riemann pe I dacă şi numai dacă f_1 şi f_2 sunt integrabile Riemann pe I. În acest caz integrala funcţiei f pe $I = [a, b]$ se notează cu $\int_I f(t)dt$ sau $\int_a^b f(t)dt$ şi este dată de egalitatea:

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f_1(t)dt + i \int_a^b f_2(t)dt.$$

O mare parte din proprietăţile integralelor funcţiilor reale se transmit fără modificări integralelor funcţiilor complexe. Astfel avem:

1) Dacă $f, g : [a, b] \to \mathbb{C}$ sunt integrabile pe $[a, b]$, atunci $\alpha f + \beta g$ este integrabilă pe $[a, b]$, oricare ar fi $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ şi

$$\int_a^b [\alpha f(t) + \beta g(t)]\, dt = \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b f(t)dt.$$

2) Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ este integrabilă pe $[a, b]$, atunci oricare ar fi $c \in [a, b]$, f este integrabilă pe $[a, c]$ şi respectiv $[c, b]$ şi, mai mult, are loc

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

3) Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ este continuă pe $[a, b]$ sau continuă pe porţiuni atunci f şi $|f|$ sunt integrabile pe $[a, b]$ şi are loc inegalitatea

$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|\, dt.$$

Fie f o funcţie complexă definită pe $[a, b] \subset \mathbb{R}$. O funcţie $F : [a, b] \to \mathbb{C}$ se numeşte primitivă a funcţiei f dacă F este derivabilă pe (a, b) şi $F'(t) = f(t)$, oricare ar fi $t \in [a, b]$.

Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ este integrabilă pe $[a, b]$ şi dacă F este o primitivă a lui f, atunci are loc formula lui Leibniz-Newton:

$$\int_a^b f(t)dt = F(t)\,\Big|_a^b = F(b) - F(a)\ .$$

Capitolul 4

Funcţii complexe de o variabilă complexă

4.1 Generalităţi

Definiţia 4.1.1. *Considerăm A o submulţime a lui $\mathbb{C}$. Vom spune că am definit o funcţie f pe mulţimea A cu valori complexe şi vom scrie $f : A \to \mathbb{C}$ dacă fiecărui punct $z \in A$ îi corespunde în mod unic un punct $w \in \mathbb{C}$ şi vom nota $w = f(z)$.*

Să scriem $z = x + iy$, $w = u + iv$. Funcţia astfel definită se numeşte funcţie complexă de variabilă complexă.

Corespondenţa dintre z şi w, definită în funcţia f, semnifică faptul că dându-se perechea ordonată $(x, y) \in A$, putem cunoaşte în mod unic perechea ordonată (u, v). Deci u şi v vor fi două funcţii reale de două variabile reale x şi y, definite pe mulţimea A, $u = u(x, y)$, $v = v(v, y)$ adică vom putea scrie $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

Astfel, pentru a studia o funcţie complexă de o variabilă reală revine să studiem un cuplu de funcţii reale de două variabile reale $u(x, y) = \mathrm{Re}f(z)$ respectiv $v(x, y) = \mathrm{Im}f(z)$.

Observaţie. Pentru a putea da o interpretare geometrică a corespondenţei dintre z şi w, stabilită de funcţia f, vom considera două plane complexe: planul variabilei independente z, notat (z), şi planul variabilei dependente w, notat (w). Funcţia f poate fi interpretată ca o transformare punctuală care transformă puncte din planul (z) în puncte din planul (w).

Dacă $z \in A$, punctul $w = f(z)$ se numeşte imaginea lui z prin transformarea definită de f. Notăm cu $f(A)$ mulţimea tuturor imaginilor punctelor din A, adică $f(A) = \{w \in \mathbb{C} : \exists z \in A, w = f(z)\}$.

Un punct $z \in A$, care are ca imagine pe $w \in f(A)$, se numeşte contraimaginea lui w prin funcţia f.

Dacă un punct $z \in A$ are o singură imagine atunci reciproca nu mai este valabilă în general, adică s-ar putea ca un punct w să aibă mai multe contraimagini. Astfel putem nota cu $f^{-1}(w)$ mulţimea acestor contraimagini. Dacă $D \subseteq f(A)$, vom numi contraimaginea lui D mulţimea $f^{-1}(D) = \{z \in A : f(z) \in D\}$.

Definiţia 4.1.2. *Considerăm funcţia $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, şi a un punct de acumulare a mulţimii A. Vom spune că funcţia f are limita $l \in \mathbb{C}$ în punctul a, dacă oricare ar fi o vecinătate W_l a punctului l, există o vecinătate a lui a, V_a, astfel încât $z \in A \cap V_a \Rightarrow f(z) \in W_l$. Vom scrie aceasta prin $l = \lim\limits_{z\to a} f(z)$ sau $f(z) \to l, (z \to a)$.*

Definiţia de mai sus este echivalentă cu următoarele două definiţii:

Definiţia 4.1.3. *Funcţia f are limita l în punctul a dacă oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $\delta > 0$ astfel încât: $z \in A$ şi $0 < |z - a| < \delta \Rightarrow |f(z) - l| < \varepsilon$.*

Definiţia 4.1.4.*Funcţia f are limita l în punctul a dacă oricare ar fi şirul (z_n), $z_n \in A$, $z_n \neq a$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ şirul valorilor $(f(z_n))$ are limita l adică $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = l$.*

Observaţii. 1.Condiţia $\lim\limits_{z\to a} f(z_n) = l$ este echivalentă cu $\lim\limits_{z\to a} \mathrm{Re} f(z) = \mathrm{Re}\, l$ şi $\lim\limits_{z\to a} \mathrm{Im} f(z) = \mathrm{Im}\, l$. Considerăm funcţia $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ şi $a \in A$. Vom spune că funcţia f este continuă în punctul a dacă există limita funcţiei f în punctul a şi este egală cu valoarea funcţiei în acest punct adică $\lim\limits_{z\to a} f(z) = f(a)$.

2.Pentru a putea vorbi despre limita de mai sus, punctul a ar trebui să fie punct de acumulare al mulţimii A, dar deoarece funcţia este definită şi în punctul a este avantajos să completăm definiţia de mai sus şi în cazul când a este punct izolat al mulţimii A, considerând prin definiţie că funcţia este continuă.

3.Dacă funcţia f este continuă în fiecare punct din A, atunci spunem că f este continuă pe muţimea A.

4.Suma şi produsul a două funcţii continue sunt continue, câtul a două funcţii continue este o funcţie continuă în $a \in A$ în cazul când numitorul este diferit de zero.

5.Continuitatea funcţiei f în punctul $a \in A$ poate fi exprimată prin următoarele definiţii echivalente:

a) *Funcţia $f : A \to \mathbb{C}$ este continuă în punctul $a \in A$, dacă oricare ar fi vecinătatea W_b a punctului $b = f(a)$, există o vecinătate V_a a punctului a astfel* *încât $z \in A \cap V_a \Rightarrow f(z) \in W_b$.*

b) *Funcţia f este continuă în punctul $a \in A$, dacă oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $\delta(\varepsilon) > 0$, astfel încât $z \in A$, cu $|z - a| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(a)| < \varepsilon$.*

c) *Funcţia $f : A \to \mathbb{C}$ este continuă în punctul $a \in A$, dacă oricare ar fi şirul (z_n), $z_n \in A$, $z_n \to a$, avem $f(z_n) \to f(a)$. Dacă $f(A) = B$, funcţia f va fi continuă pe A, dacă contraimaginea oricărei mulţimi deschise din B este o mulţime deschisă în A.*

d) *Funcţia $f : A \to \mathbb{C}$ este uniform continuă pe mulţimea A, dacă: oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $\delta(\varepsilon) > 0$, astfel încât oricare ar fi $z', z'' \in A$, cu $|z' - z''| < \delta \Rightarrow |f(z') - f''(z)| < \varepsilon$.*

6.Continuitatea uniformă a funcţiei f pe mulţimea A este echivalentă cu continuitatea uniformă a funcţiilor Ref şi Imf pe mulţimea A. Reciproca nu e valabilă în general.

Fie $f : E \to \mathbb{C}$, E o submulţime a numerelor complexe, funcţie continuă în domeniul E. Pentru orice $z \in E$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Considerăm un punct vecin $z + \Delta z$ a punctului z cu valoarea corespunzătoare $f(z + \Delta z) = u(x + \Delta x, y + \Delta y) + iv(x + \Delta x, y + \Delta y)$. Calculăm în continuare raportul următor:

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} =$$

$$= \frac{u(z + \Delta z, y + \Delta y) - u(x, y) + i\left[v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y)\right]}{x + \Delta x + i(y + \Delta y) - x - iy} =$$

$$= \frac{u(z + \Delta z, y + \Delta y) - u(x, y) + i\left[v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y)\right]}{\Delta x + i\Delta y}.$$

Presupunem că funcţiile u şi v au derivate parţiale de ordinul I continue în raport cu x şi y avem

$$u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + h_1\Delta x + k_1\Delta y$$

$$v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y) = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + h_2\Delta x + k_2\Delta y$$

unde k_1, k_2, k_3, k_4 tind către zero odată cu $\Delta x^2 + \Delta y^2$.

În sceste condiţii vom putea scrie că

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+h_1\Delta x+k_1\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}+$$

$$+i\frac{\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y+h_2\Delta x+k_2\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}.$$

Scoatem factor comun pe Δx atât la numărător cât şi la numitor în membrul drept şi obţinem:

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x}+h_1+k_1\frac{\Delta y}{\Delta x}}{1+i\frac{\Delta y}{\Delta x}}+i\frac{\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x}+h_2+k_2\frac{\Delta y}{\Delta x}}{1+i\frac{\Delta y}{\Delta x}}=$$

$$=\frac{\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\Delta y}{\Delta x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial y}\right)}{1+i\frac{\Delta y}{\Delta x}}+\frac{h_1+ih_2+\frac{\Delta y}{\Delta x}(k_1+ik_2)}{1+i\frac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

Considerăm φ este unghiul făcut de segmentul care uneşte pe z cu $z+\Delta z$ cu sensul pozitiv al axei Ox şi vom obţine că $\text{tg}\varphi=\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Când punctul $z+\Delta z$ tinde către z de-a lungul segmentului ce face unghiul φ cu Ox, raportul $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ rămâne constant, egal cu $tg\varphi$ iar raportul $\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$ tinde către

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}tg\varphi+i\frac{\partial v}{\partial y}\right)}{1+itg\varphi}$$

deoarece h_1, k_1, h_2, k_2 tind către zero iar numitorul $1+i\text{tg}\varphi$ nu poate fi nul deoarece $\sqrt{1+\text{tg}^2\varphi}\geq 1$.

Se observă că $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$ depinde de direcţia de-a lungul căreia punctul $z+\Delta z$ tinde către z adică de unghiul φ.

Definiţia 4.1.5. *Vom spune că funcţia $f(z)$ este derivabilă în punctul z numai atunci când aceasta este unică deci independentă de unghiul φ, caz în care limita se va numi derivata funcţiei în z şi se va nota $f'(z)$.*

Observaţie. Valoarea $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$, dacă nu depinde de φ înseamnă că trebuie să fie aceeaşi pentru $tg\varphi=0$ sau $tg\varphi=\infty$. Dacă $tg\varphi=0$ atunci $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$.

Dacă $tg\varphi=\infty$ atunci

$$f'(z) = \frac{\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}}{i} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Deci pentru ca $f'(z)$ să nu depindă de unghiul φ este necesar şi suficient să avem:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

sau

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Deci numai atunci când derivatele parţiale de ordinul I ale funcţiilor u şi v verifică aceste două condiţii numite condiţiile lui Cauchy-Riemann, avem în punctul z o derivată unică a funcţiei $f(z)$. În aceste condiţii:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Definiţia 4.1.6. *Dacă funcţia f în z admite o derivată unică spunem că funcţia f este monogenă în punctul z. Dacă este monogenă în fiecare punct al domeniului D atunci spunem că f este monogenă în domeniul D.*

Observaţie. Dacă notăm A mulţimea punctelor din domeniul D prin care punctul $z + \Delta z$ se apropie de z, A poate fi un segment sau un arc de curbă, atunci putem defini derivata funcţiei f în punctul $z \in A' \cap A$ în raport cu mulţimea A.

Definiţia 4.1.7. *Prin definiţie vom spune că funcţia $f : D \to \mathbb{C}$ este derivabilă în punctul z, în raport cu mulţimea A, dacă există limita finită*

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f_A(z + \Delta z) - f_A(z)}{\Delta z} = f'_A(z).$$

Limita finită $f'_A(z)$ se va numi derivata funcţiei f în punctul z, în raport cu mulţimea A.

Dacă această limită nu depinde de mulţimea A, adică este unică indiferent de submulţimile care conţin punctul z, vom spune că funcţia f este monogenă în z, adică are o singură derivată.

4.2 Condiţii de monogenitate într-un punct

Fie funcţia f definită pe o mulţime deschisă E şi pentru orice $z \in E$, $z = x + iy$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Problema care se pune este de a vedea care sunt condiţiile asupra funcţiilor u şi v care să implice monogenitatea funcţiei f în punctul z.

Teorema 4.2.1. *Pentru ca funcţia f să fie derivabilă în punctul $z = x + iy \in E$ este necesar şi suficient ca:*

1.Funcţiile u şi v să fie diferenţiabile în punctul (x, y);

2.În punctul (x, y) să fie verificate condiţiile lui Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Demonstraţie. Demonstraţia se va realiza în două etape, prima etapă fiind necesitatea iar a doua etapă suficienţa.

Necesitatea. Vom presupune că în punctul $z = x + iy$ există derivata $f'(z) = a + ib$. În acest caz, creşterea $\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z)$ a funcţiei f în punctul z se poate pune sub forma:

$$\Delta w = f'(z)\Delta z + \lambda \Delta z, \tag{$*$}$$

unde $\lambda = \lambda(\Delta z) \to 0$, pentru $\Delta z \to 0$. Punând:

$$z = x + iy, \ \Delta w = \Delta u + i\Delta v, \ \lambda = \lambda' + i\lambda''$$

şi înlocuind în $(*)$, ajungem la formulele:

$$\Delta u = a\Delta x - b\Delta y + \lambda'\Delta x - \lambda''\Delta y$$

$$\Delta v = b\Delta x + a\Delta y + \lambda''\Delta x + \lambda'\Delta y$$

unde $\lambda' \to 0$ şi $\lambda'' \to 0$, pentru $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0$, ceea ce arată că funcţiile u şi v sunt diferenţiabile în punctul (x, y) şi:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a = \frac{\partial v}{\partial y}, \ \frac{\partial u}{\partial y} = -b = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

adică sunt verificate condiţiile lui Cauchy-Riemann şi astfel necesitatea este demonstrată.

Suficienţa. Presupunem că funcţiile u şi v sunt diferenţiabile în punctul (x,y) şi verifică în acest punct condiţiile Cauchy-Riemann şi astfel putem scrie:

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \alpha'\Delta x + \alpha''\Delta y$$

$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \beta'\Delta x + \beta''\Delta y$$

unde $\alpha' \to 0$, $\alpha'' \to 0$, $\beta'' \to 0$ când $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0$.

Considerând $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = a$ respectiv $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -b$, vom obţine că

$$\Delta u = a\Delta x - b\Delta y + \alpha'\Delta x + \alpha''\Delta y,$$

$$\Delta v = b\Delta x + a\Delta y + \beta'\Delta x + \beta''\Delta y.$$

Astfel se obţine că

$$\Delta w = (a+ib)\Delta z + \lambda\Delta z,$$

unde am notat

$$\lambda = (\alpha' + i\beta')\,\frac{\Delta x}{\Delta z} + (\alpha'' + i\beta'')\,\frac{\Delta y}{\Delta z}.$$

În final vom avea:

$$|\lambda| \leq |\alpha' + i\beta'|\left|\frac{\Delta x}{\Delta y}\right| + |\alpha'' + i\beta''|\left|\frac{\Delta y}{\Delta z}\right| \leq |\alpha'| + |\beta'| + |\alpha''| + |\beta''|,$$

de unde rezultă că $\lambda \to 0$, pentru $\Delta z \to 0$, deci funcţia este monogenă în punctul z.

Observaţii. 1. Se deduce simplu formula următoare:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

care ne permite calculul derivatei funcţiei f în punctul z, cu ajutorul derivatelor parţiale de ordinul I ale funcţiilor u şi v.

2.Se cunoaşte că numai existenţa derivatelor parţiale de ordinul I nu este suficientă pentru a asigura diferenţiabilitatea funcţiilor u şi v într-un punct. Astfel, în ipoteza existenţei derivatelor parţiale de ordinul I, condiţiile de monogenitate ale lui Cauchy-Riemann sunt numai necesare, dar nu suficiente pentru ca funcţia f să fie monogenă într-un punct.

Capitolul 5

Funcţii olomorfe

5.1 Generalităţi

Despre o funcţie f, definită pe mulţimea deschisă E, se spune că este olomorfă în E dacă ea este derivabilă în fiecare punct al lui E. Denumirea de funcţie olomorfă provine de la cuvintele greceşti olos = tot, întreg, şi morfos = formă. Termenul de funcţie analitică îl vom folosi mai târziu, când vom considera funcţiile definite în întreg domeniul de existenţă. Astfel, o funcţie olomorfă într-un domeniu E nu este decât o restrângere corespunzătoare pe acest domeniu a unei funcţii analitice. Mai întâi vom arăta că o funcţie olomorfă într-un domeniu E se poate dezvolta într-o serie de puteri în vecinătatea oricărui punct din E.

Proprietatea unei funcţii de a fi olomorfă se referă la o întreagă mulţime deschisă şi nu la un punct. Trebuie făcută diferenţa între "funcţie monogenă într-un punct" şi "funcţie olomorfă într-un punct". De exemplu, funcţia $f(z) = z\bar{z}$, definită pe $\mathbb{C}$, este monogenă în punctul $z = 0$, dar nu este olomorfă în acest punct.

Putem menţiona că proprietatea de olomorfie a unei funcţii f în E implică următoarele trei proprietăţi esenţiale ale funcţiei şi anume: uniformitatea, continuitatea şi respectiv derivabilitatea funcţiei f în E.

5.2 Diferenţiala

Un punct important al acestui paragraf este introducerea variabilelor z şi $\bar{z}$. Fie funcţia f definită pe mulţimea deschisă D. Pentru $z = x + iy \in E$ vom scrie $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Funcţia f poate fi privită şi ca o funcţie complexă de două variabile reale x şi y.

Presupunem că funcţiile reale $u = \mathrm{Re} f$ şi $v = \mathrm{Im} f$ sunt diferenţiabile în E.

Dacă $\Delta u = u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x, y)$ şi $\Delta v = v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x, y)$ iar $\Delta f = \Delta u + i\Delta v$ verificăm uşor că, creşterea Δf a funcţiei f corespunzătoare creşterilor Δx şi Δy se poate scrie sub forma $\Delta f = a\Delta x + b\Delta y + \alpha\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, unde $\alpha = \alpha(\Delta x, \Delta y) \to 0$, când $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0$.

Făcând $\Delta y = 0$ şi $\Delta x \to 0$, respectiv $\Delta x = 0$, $\Delta y \to 0$ şi astfel se obţine:

$$a = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x},$$
$$b = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Vom numi diferenţială a lui f în punctul $z = x + iy$ forma liniară în Δx şi Δy:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y.$$

Dacă $f(z) = z$, se obţine $dx = \Delta x$, iar dacă $f(z) = y$, se obţine $dy = \Delta y$ şi astfel vom putea scrie:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

Dacă $f(z) = z$, respectiv $f(z) = \overline{z}$, avem $dx = dx + idy$, respectiv $d\overline{z} = dx - idy$, de unde deducem:

$$dx = \frac{1}{2}(dz + d\overline{z}),\ dy = \frac{1}{2i}(dz + id\overline{z}).$$

Înlocuind în expresia lui df de mai sus, obţinem:

$$df = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)dz + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)d\overline{z}.$$

Putem introduce în mod natural următorii operatori:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$
$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Astfel vom avea $df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} d\overline{z}$ şi deoarece

$$z\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

observăm imediat că, condiţiile lui Cauchy-Riemann sunt echivalente cu condiţia $\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ sau $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$.

Pe de altă parte, avem:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right].$$

Dacă f este monogenă în punctul z, atunci $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ iar $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = f'(z)$ deducem că $df = f'(z) \cdot dz$, sau $f'(z) = \frac{df(z)}{dz}$.

5.3 Legătura dintre funcţiile olomorfe şi funcţiile armonice

Considerăm funcţia f definită şi olomorfă în domeniul E astfel încât $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z \in E$. În acest caz, în fiecare punct $(x,y) \in E$ avem

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Presupunem că funcţiile u şi v au derivate parţiale de ordinul I şi ordinul II continue în E. Derivând prima din relaţiile de mai sus în raport cu x, iar a doua în raport cu y şi adunând se obţine că:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Analog se obţine:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Considerăm următorul operator:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

care poartă numele de operatorii lui Laplace. În acest context ecuaţiile de mai sus se scriu $\Delta u = 0$ şi respectiv $\Delta v = 0$.

O funcţie $U = U(x, y)$, definită şi continuă împreună cu derivatele parţiale de oridinul I şi II în domeniul E, care verifică în acest domeniu ecuaţia cu derivate parţiale de ordinul doi $\Delta U = 0$, numită ecuaţia lui Laplace, se numeşte funcţie armonică în domeniul E. Deci funcţiile u şi v sunt funcţii armonice în E. Rezultatul a fost stabilit în ipoteza că aceste funcţii au derivate parţiale de ordinele I şi II continue. Astfel, partea reală şi partea imaginară a unei funcţii olomorfe într-un domeniu D sunt funcţii armonice în D.

5.4 Determinarea unei funcţii olomorfe când se cunoaşte partea sa reală

Am observat că funcţiile u şi v ce reprezintă partea reală şi partea imaginară a unei funcţii olomorfe în E, nu pot fi funcţii cu totul arbitrare, ele fiind funcţii armonice legate între ele prin condiţiile lui Cauchy-Riemann.

Considerâm o funcţie $u = u(x, y)$ definită şi armonică în domeniul E şi presupunem că domeniul E este simplu-conex. Se pune problema de a determina o funcţie f olomorfă în domeniul E, care să aibă ca parte reală chiar funcţia u. Aceasta înseamnă că trebuie determinată o funcţie reală $v = v(x, y)$, definită în domeniul E, armonică, astfel încât funcţia $f : E \to \mathbb{C}$ definită prin $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ oricare ar fi $z \in E$ să fie olomorfă în acest domeniu. Funcţia v se numeşte conjugata armonică a funcţiei u.

În consecinţă trebuie determinată funcţia armonică v, care verifică în domeniul E sistemul de ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul I:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \ \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Astfel, determinarea funcţiei v revine la integrarea diferenţialei totale:

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy = -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy.$$

Aceasta este o diferenţială totală exactă, deoarece condiţia de integrabilitate $\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$ revine la $\Delta u = 0$ şi este verificată deoarece u a fost presupusă o funcţie armonică.

Din acest motiv rezultă că funcţia v este dată de formula:

$$v(x,y) = -\int\limits_{x_0}^{x} \frac{\partial u}{\partial y} dx + \int\limits_{y_0}^{y} \frac{\partial u}{\partial x} |_{x=x_0} dy + C$$

constanta reală C fiind arbitrară.

În concluzie, dându-se partea reală a unei funcţii olomorfe, funcţia se poate determina, în afara unei constante aditive pur imaginară.

Considerând cunoscută partea imaginară $v = v(x,y)$ ca fiind o funcţie armonică oarecare, funcţia olomorfă f care să aibă ca parte imaginară această funcţie va fi determinată, în afară de o constantă reală aditivă. Aceast fapt rezultă imediat din relaţia: $-if(z) = v(x,y) - iu(x,y)$.

5.5 Interpretarea geometrică a derivatei şi transformarea conformă

Considerăm funcţia f definită şi continuă în domeniul E. Vom presupune că în punctul $z_0 \in E$ funcţia f este derivabilă, deci există $f'(z_0)$.

Mai întâi o să analizăm care este interpretarea geometrică a modulului derivatei în punctul z_0. Considerăm $w_0 = f(z_0)$. Fie z un punct oarecare din E şi $w = f(z)$ imaginea sa. Considerăm vectorii $\vec{z_0 z}$ şi $\vec{w_0 w}$ cărora le corespund numerele complexe $z - z_0$ şi $w - w_0$. În virtutea continuităţii funcţiei f avem $w \to w_0$, când $z \to z_0$. Raportul imaginilor celor doi vectori este dat de următoarea relaţie:

$$\rho = \frac{|\vec{w_0 w}|}{|\vec{z_0 z}|} = \frac{|w - w_0|}{|z - z_0|} = \left| \frac{w - w_0}{z - z_0} \right| = \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right|.$$

Datorită faptului că f este derivabilă în punctul z_0, rezultă că $\rho \to |f'(x_0)|$, atunci când $z \to z_0$. Această limită este dependentă de direcţia vectorului $\vec{z_0 z}$, deci pentru z suficient de apropiat de z_0, are loc egalitatea:

$$|\vec{w_0 w}| \approx |f'(z_0| \, |\vec{z_0 z}| \, .$$

Acest lucru înseamnă că, dacă se consideră un arc rectificabil γ care trece prin punctul z_0, sau are o extremitate în acest punct şi notăm cu ds elementul de arc în punctul z_0, şi dacă notăm cu dS elementul de arc la curba imagine în punctul $w_0 = f(z_0)$ prin transformarea $w = f(z)$ avem $\frac{dS}{ds} = |f'(z_0)|$ această formulă având loc pentru orice arc γ.

Astfel putem afirma că modulul derivatei, $|f'(z_0)|$, caracterizează deformarea dimensiunilor liniare în punctul z_0, de aceea, numărul $|f'(z_0)|$ poartă şi numele de coeficient de deformare liniară în punctul z_0, adică ne arată în ce raport se măresc sau se micşorează dimensiunile liniare în punctul z_0.

În cele ce urmează vom vedea care este semnificaţia geometrică a argumentului în punctul z_0 presupunând că $f'(z_0) \neq 0$. Pentru aceasta considerăm γ un arc continuu situat în E cu extremitatea în punctul z_0, $\gamma : I \to E$, unde $I = [0,1]$, $\gamma(0) = z_0$. Presupunem că în punctul z_0 există o semitangentă la arcul γ şi să notăm cu α unghiul pe care îl face această semitangentă cu axa reală pozitivă. Aceasta înseamnă că, alegând pentru argument o determinare convenabilă, există limita:

$$\lim_{z \to z_0, z \in \gamma} \mathrm{Arg}(z - z_0) = \lim_{t \to 0} \mathrm{Arg}\,[z(t) - z_0]\,.$$

Considerăm Γ imaginea arcului γ prin transformarea continuă $w = f(z)$. Cunoaştem că Γ este un arc continuu cu o extremitate în punctul $w_0 = f(z_0)$. Astfel arătăm că în punctul w_0 există o semitangentă la arcul Γ şi vom evalua unghiul pe care îl face această semitangentă cu axa reală pozitivă.

Datorită faptului că în punctul z_0 funcţia f este monogenă vom putea scrie că $w - w_0 = (z - z_0)\,[f'(z_0) + \lambda]$ unde $\lambda = \lambda(z) \to 0$, când $z \to z_0$.

În aceste condiţii avem că $Arg(w - w_0) = Arg(z - z_0) + Arg\,[f'(z_0) + \lambda]$.

Deoarece $f'(z_0) \neq 0$, există, $\mathrm{Arg} f'(z_0)$ şi să alegem o determinare oarecare ω a lui $\mathrm{Arg} f'(z_0)$.

Deoarece $\lambda \to 0$, pentru $z \to z_0$, avem $\mathrm{Arg}\,[f'(z_0) + \lambda] \to \omega$ când $z \to z_0$.

Având în vedere faptul că funcţia f este continuă atunci când $z \to z_0$, de-a lungul curbei γ punctul $w \to w_0$ de-a lungul curbei Γ. Trecând la limită în egalitatea de mai sus, rezultă că există limita membrului stâng al acestei egalităţi şi avem:

$$\lim_{z \to z_0, z \in \gamma} \mathrm{Arg}(w - w_0) = \lim_{w \to w_0} \mathrm{Arg}\,[w - w_0] = \alpha + \omega$$

ceea ce înseamnă că în punctul ω_0 există o semitangentă la arcul Γ şi notând cu β unghiul pe care aceasta îl face cu sensul pozitiv al axei reale, avem adevărată relaţia $\beta = \alpha + \omega$.

Această relaţie ne arată faptul că argumentul derivatei în punctul z_0, $\mathrm{Arg} f'(z_0)$, în ipoteza că $f'(z_0) \neq 0$, reprezintă unghiul de rotaţie al semitangentei la curba γ în punctul z_0, prin transformarea $w = f(z_0)$.

Relaţia $\beta = \alpha + \omega$ este evident valabilă oricare ar fi arcul continuu dar cu condiţia să existe semitangenta, respectiv tangenta la γ în punctul z_0. Fie atunci γ_1 un alt arc continuu şi Γ_1 arcul corespunzător. Notăm cu α_1 respectiv cu β_1, unghiul pe care semitangenta (tangenta) la γ_1 în punctul z_0, respectiv semitangenta (tangenta) la Γ_1 în punctul w_0 îl face cu semiaxa reală pozitivă. Observând că ω nu depinde ele modul cum z tinde către z_0 (deci nu depinde de arcul continuu ce trece prin z_0), rezultă că avem $\beta_1 = \alpha_1 + \omega$.

Eliminându-l pe ω între această relaţie şi cea obţinută mai sus, obţinem $\beta_1 - \beta = \alpha_1 - \alpha$.

Aceasta ne arată că unghiul dintre arcele γ şi γ_1 în punctul z_0 este egal cu unghiul dintre Γ şi γ_1 în punctul $w_0 = f(z_0)$.

Astfel, dacă funcţia f este derivabilă în punctul $z_0 \in E$ şi $f'(z_0) \neq 0$, atunci unghiul pe care cele două arce îl formează în punctul z_0 se conservă prin transformarea, $w = f(z)$.

Observaţie. Transformarea conformă este o transformare punctuală, care conservă unghiurile.

Deci transformarea $w = f(z)$ este conformă în punctele z din domeniul E în care funcţia f este monogenă şi $f'(z) \neq 0$.

Observaţii. 1.Dacă funcţia f este olomorfă în domeniul E şi $f'(z) \neq 0$ pentru orice $z \in E$, atunci ea tranformă conform domeniul E pe domeniul $G = f(E)$.

2. Dacă funcţia f este olomorfă şi univalentă atunci ea realizează o corespondenţă biunivocă între punctele domeniului E şi ale domeniului G. Se va arăta că în acest caz este îndeplinită şi condiţia $f'(z) \neq 0$, deci transformarea este şi conformă. Se spune că funcţia f olomorfă şi univalentă în E realizează o reprezentare conformă a domeniului E pe domeniul $G = f(E)$.

3. Transformarea conformă definită de o funcţie olomorfă cu derivată diferită de zero, conservă unghiurile atât în mărime cât şi în sens, ea numindu-se transformare conformă de speţa I.

4. O transformare conformă care conservă unghiurile în valoare absolută dar schimbă sensul lor se numeşte de speţa a II-a. O astfel de transformare este realizată de exemplu de conjugata unei funcţii olomorfe în D cu derivată, nenulă.

5. Dacă $f(z) = u(x,u) + iv(x,y)$ condiţia $f'(z_0) \neq 0$, $z_0 = x_0 - iy_0$ nu este altceva decât condiţia ca jacobianul transformării $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ să fie diferit de zero în punctul $(x_0, y_0) \in E$.

Întradevăr, avem următoarea relaţie adevărată:

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & -\frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial x} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = |f'(z)|^2 .$$

Capitolul 6

Şiruri şi serii de funcţii

6.1 Şiruri de funcţii

Fie (f_n), un şir de funcţii complexe, definite toate pe o aceeaşi mulţime $A \subset \mathbb{C}_\infty$. Vom presupune că aceste funcţii iau valori finite pe A, $f_n : A \to \mathbb{C}$.

Definiţia 6.1.1. *Vom spune că şirul (f_n) este convergent în punctul $z \in A$, dacă şirul numeric $(f_n(z))$ este convergent.*

Definiţia 6.1.2. *Vom spune că şirul de funcţii (f_n) converge simplu sau punctual pe mulţimea A dacă şi numai dacă el converge în fiecare punct $z \in A$.*

Funcţia $f : A \to \mathbb{C}$, definită pentru orice $z \in A$, $f(z) = \lim\limits_{z\to\infty} f_n(z)$ se numeşte limita şirului (f_n) şi putem scrie $f_n \to f,\ n \to \infty$.

Observaţie. Deoarece şirul de funcţii (f_n) este convergent şi are limita f este echivalent cu afirmaţia următoare: oricare ar fi $\varepsilon > 0$ şi oricare ar fi $z \in A$, există $N(\varepsilon, z)$, astfel încât pentru $n > N(\varepsilon, z) \Rightarrow |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$, sau, conform criteriului de convergenţă al lui Cauchy, cu afirmaţia, oricare ar fi $\varepsilon > 0$ şi oricare ar fi $z \in A$, există $N(\varepsilon, z)$: $n > N(\varepsilon, z)$ şi $p \in \mathbb{N}, p \geq 1 \Rightarrow |f_{n+p}(z) - f_n(z)| < \varepsilon$.

Se observă aici caracterul local al noţiuni de convergenţă. Ea nu înseamnă decât convergenţă separat în fiecare punct $z \in A$, al şirului numeric $(f_n(z))$. Pentru fiecare valoare a lui z obţinem un alt şir numeric. Chiar dacă toate aceste şiruri sunt convergente, ele nu converg la fel. Acest lucru înseamnă că numărul $N(\varepsilon, z)$ depinde şi de z.

Putem prezenta însă o noţiune de convergenţă cu caracter global. Acest lucru este posibil în cazul când putem alege un număr N care să nu depindă de z, deci care să fie acelaşi pentru orice $z \in A$, ceea ce se întâmplă dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există marginea superioară finită $N(\varepsilon) = \sup\limits_{z\in A} N(\varepsilon, z)$.

În aceste condiţii, pentru orice $z \in A$, numărul $N(\varepsilon, z)$ se poate înlocui cu $N(\varepsilon)$ şi în acest caz şirul (f_n) se spune că este uniform convergent pe mulţimea A. Putem da deci următoarea definiţie:

Definiţia 6.1.3. *Şirul de funcţii (f_n), definite pe mulţimea A, este uniform convergent pe A şi are limita f dacă oricărui $\varepsilon > 0$ putem face să-i corespundă un număr $N(\varepsilon) > 0$ astfel încât să avem $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ oricare ar fi $n > N(\varepsilon)$ şi pentru orice $z \in A$. Vom scrie, în acest caz, $f_n \xrightarrow{u} f$.*

Conform criteriului lui Cauchy, convergenţa uniformă a şirului (f_n) este echivalentă cu afirmaţia următoare: oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $N(\varepsilon) > 0$, stfel încât pentru orice $n > N(\varepsilon)$ şi $z \in A, p \in \mathbb{N}, p \geq 1 \Rightarrow |f_{n+p}(z) - f_n(z)| < \varepsilon$.

Observaţie. Noţiunile de convergenţă simplă şi uniformă ale unui şir (f_n) se pot relativiza la submulţimi ale mulţimii de definiţie A. Astfel, vom spune că şirul (f_n) de funcţii definite pe mulţimea A este convergent simplu (respectiv convergent uniform) pe submulţimea $B \subset A$, dacă şirul restrângerilor $(f_n\,|B)$ este convergent simplu (respectiv convergent uniform).

Notând $f_B : B \to \mathbb{C}$ limita acestui şir, vom scrie că $f_n\,|_B \to f_B$ şi respectiv $f_n\,|_B \xrightarrow{u} f_B$.

Evident că dacă şirul (f_n) este convergent simplu (respectiv uniform) şi are limita f, atunci acest şir este convergent simplu (respectiv uniform) pe orice submulţime $B \subset A$ şi are limita f_B.

Deci vom avea $f_n \to f \Rightarrow f_n\,|_B \to f\,|_B$ oricare ar fi $B \subset A$ şi $f_n \xrightarrow{u} f \Rightarrow f_n\,|_B \xrightarrow{u} f\,|_B$ oricare ar fi $B \subset A$.

În continuare presupunem că termenii şirului (f_n) sunt funcţii definite pe acelaşi domeniu $D \subset \mathbb{C}_\infty$, deci $f_n : D \to \mathbb{C}$.

În acest caz se poate introduce noţiunea de convergenţa uniformă a şirului (f_n) pe orice compact K inclus în D.

Definiţia 6.1.4. *Spunem că şirul (f_n) converge uniform pe orice compact din D dacă, oricare ar fi mulţimea compactă $K \subset D$ şirul restrângerilor $(f_n\,|K)$ este uniform convergent.*

Dacă şirul (f_n) este uniform convergent pe orice compact, el este şi simplu convergent şi să notăm cu f limita sa. Convergenţa uniformă pe orice compact al şirului (f_n) către f o vom nota $f_n \to f,\ n \to \infty$.

Aceasta înseamnă că, oricare ar fi $K \subset D$, avem $f_n\,|_K \xrightarrow{u} f\,|_K$, sau oricare ar fi $\varepsilon > 0$ şi oricare ar fi $K \subset D$, există $N(\varepsilon, k)$ astfel încât pentru orice $n > N(\varepsilon, k)$ şi $z \in K \Rightarrow |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$.

Evident că numărul $N(\varepsilon, k)$ depinde de alegerea mulţimii compacte K.

Dacă şirul (f_n) converge uniform, atunci el converge uniform şi pe orice compact. Reciproca, în general, nu este valabilă.

Conform celor de mai sus, avem următoarele implicaţii:

$$f_n \xrightarrow{u} f \Rightarrow f_n \rightarrow f \Rightarrow f_n \rightarrow f.$$

Teorema 6.1.5. *Dacă funcţiile* $f_n : A \rightarrow \mathbb{C}$, $n = 0, 1, 2, ...$ *sunt continue în punctul* $a \in A$, *iar şirul* (f_n) *converge uniform, atunci funcţia limită este şi ea continuă în punctul* a.

Demonstraţie. Ştim că $f_n \xrightarrow{u} f$. Aceasta înseamnă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există un $N(\varepsilon)$ astfel încât $n > N(\varepsilon)$ şi $z \in A \Rightarrow |f_n(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

În particular, pentru a, $n > N(\varepsilon)$ avem

$$|f_n(a) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Să fixăm un indice $n > N(\varepsilon)$. Deoarece f_n este continuă în a, rezultă că lui $\varepsilon > 0$ îi corespunde un $\delta(\varepsilon)$ astfel încât pentru orice:

$$z \in A \ \ |z - a| < \delta \Rightarrow |f_n(z) - f_n(a)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Deci pentru orice $z \in A$ pentru care $|z - a| < \delta$, avem:

$$|f(z) - f(a)| \leq |f(z) - f_n(z)| + |f_n(z) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)| < \varepsilon$$

ceea ce arată că f este continuă în a.

Corolar 6.1.6. *Dacă funcţiile* f_n, $n = 0, 1, 2, ...$ *sunt continue pe* A *şi şirul* (f_n) *este uniform convergent, atunci funcţia limită* f *este şi ea continuă pe* A.

Corolar 6.1.7. *Dacă funcţiile* $f_n, n = 0, 1, 2, ...$ *sunt definite şi continue pe domeniul* D, *iar şirul* (f_n) *este uniform convergent pe orice compact din* D, *atunci funcţia limită* f *este continuă în* D. *Aceasta rezultă imediat din faptul că orice punct* $z \in D$, *are o vecinătate compactă inclusă în* D *pe care* f *va fi continuă.*

6.2 Serii de funcţii

Considerăm seria $\sum\limits_{i=1}^{\infty} f_i$ de funcţii $f_n : A \rightarrow \mathbb{C}$, unde $A \subset \mathbb{C}_\infty$.

Sumele parţiale $S_n = f_0 + f_1 + ... + f_n$, $n = 0, 1, 2, ...$ sunt funcţii $S_n : A \rightarrow \mathbb{C}$.

Seria $\sum f_n$ este convergentă (respectiv uniform convergentă) dacă şi numai dacă şirul (S_n) este convergent (uniform convergent). Limita $S : A \rightarrow \mathbb{C}$ a şirului (S_n) va fi suma seriei de funcţii şi vom scrie $S = \sum\limits_{i=1}^{\infty} f_i$.

Spunem că seria $\sum_{i=1}^{\infty} f_i$ este convergentă (respectiv uniform convergentă) pe mulţimea $B \subseteq A$, dacă seria restrângerilor $\sum (f_n |B)$ este convergentă (respectiv uniform convergentă). Suma ei va fi definită pe mulţimea B.

În teoria seriilor de funcţii se pune în mod natural problema găsirii mulţimii maxime $B \subseteq A$ pe care seria să fie convergentă. Aceasta se numeşte mulţimea maximă de convergenţă a seriei $\sum f_n$ şi este caracterizată în felul următor: acele elemente $z \in B \Rightarrow \sum f_n(z)$ convergentă respectiv acei $z \in A - B \Rightarrow \sum f_n(z)$ divergentă.

Convergenţa uniformă pe mulţimea $B \subseteq A$ a seriei de funcţii $\sum f_n$ este echivalentă cu oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $N(\varepsilon)$ astfel încât pentru orice $n > N(\varepsilon)$, $z \in B$ şi $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$ să avem $|f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + ... + f_{n+p}(z)| < \varepsilon$.

Folosind criteriul comparaţiei de la seriile cu termeni pozitivi, se obţine imediat următorul criteriu de convergenţă uniformă pentru serii de funcţii.

Teorema 6.2.1. *Dacă există o serie convergentă de numere nenegative $\sum u_n$ şi un rang n_0 astfel încât, pentru orice $n > n_0$ şi $z \in B \Rightarrow |f_n(z)| \leq u_n$ atunci seria $\sum f_n$ este uniform convergentă pe B. Ea este şi absolut convergentă, adică pentru orice $z \in B$ seria, valorilor $\sum f_n(z)$ este absolut convergentă.*

6.3 Serii de puteri

Seriile de puteri sunt un caz particular, dar cel mai important în teoria funcţiilor analitice de serii de funcţii în care f_n sunt definite prin oricare ar fi $z \in \mathbb{C}$, $f_n(z) = a_n z^n$, $a_n \in \mathbb{C}$. unde a_n sunt numere complexe date numite coeficienţii seriei de puteri.

Practic, o serie de puteri se va scrie în felul următor:

$$a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Prima problemă pe care ne-o punem este cea a determinării mulţimii de convergenţă a unei serii de puteri. Pentru prima oară Abel a arătat că această mulţime este un disc cu centrul în origine, care se numeşte disc de convergenţă, la care este posibil să se adauge unele puncte de pe frontiera sa. Acest disc se poate reduce la origine sau poate fi întreg planul $\mathbb{C}$.

Afirmaţiile de mai sus se pot deduce din următoarea teoremă, numită teorema lui Abel:

Teorema 6.3.1. *Dacă seria* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *este convergentă pentru* $z = z_0$*, ea va fi absolut convergentă pentru orice* z*,* $|z| < |z_0|$*.*

Demonstraţie. Vom nota cu $r_0 = |z_0|$ şi $r = |z|$. Deoarece seria:

$$a_0 + a_1 z_0 + a_2 z_0^2 + ... + a_n z_0^n + ...$$

este convergentă, rezultă că există un N astfel încât $n > N \Rightarrow |a_n| r_0^n < 1$, adică $|a_n| < \frac{1}{r_0^n}$.

Să considerăm seria $|a_0| + |a_1| r + ... + |a_n| r^n + ...$.

Pentru $n > N$ avem:

$$|a_n| r^n < \left(\frac{r}{r_0}\right)^n .$$

Dacă $r < r_0$, rezultă că termenul general al seriei

$$|a_0| + |a_1| r + ... + |a_n| r^n + ...$$

este mai mic decât termenul general al seriei geometrice $\sum \left(\frac{r}{r_0}\right)^n$ pentru orice $n > N$. Deci seria $|a_0| + |a_1| r + ... + |a_n| r^n + ...$ este convergentă pentru $r < r_0$, adică seria $a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_n z^n + ...$ este absolut convergentă pentru $|z| < |z_0|$.

Să determinăm raza discului de convergenţă care se numeşte raza de convergenţă a seriei de puteri.

Pentru aceasta aplicăm seriei $|a_0| + |a_1| r + ... + |a_n| r^n + ...$ criteriul rădăcinii. Avem:

$$\sqrt[n]{|a_n| r^n} = r \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Să notăm

$$L = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Pentru $rL < 1$ seria este convergentă, iar pentru $rL > 1$ ea este divergentă,.

Egalitatea $rL = 1$ nu ne furnizează nici o informaţie asupra naturii seriei.

Să presupunem că $L \neq 0$ şi $L \neq \infty$ şi să considerăm discul $U(0; R)$, unde $R = \frac{1}{L}$.

Pentru $|z| = r < R$, adică $rL < 1$, seria, $a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n + ...$ este absolut convergentă.

Pentru $|z| = r > R$, seria $a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n + ...$ este divergentă. În adevăr, dacă ar exista un z_0, $|z_0| > R$ astfel ca seria $a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n + ...$ să fie convergentă pentru $z = z_0$, atunci, conform teoremei lui Abel, seria modulelor ar fi convergentă pentru orice $r = |z| < |z_0|$. Cum $|z_0| > R$, putem găsi valori r aşa ca $R < r < |z_0|$. Deci seria modulelor ar fi convergentă pentru $r > \frac{1}{L}$, ceea ce este contradictoriu.

Rezultă că $U(0, R)$ este chiar discul de convergenţă al seriei $a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n + ...$ Dacă $L = 0$, atunci $rL < 1$ pentru orice r, deci seria $a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n + ...$ converge absolut pentru orice $z \in \mathbb{C}$.

Dacă $L = \infty$, atunci $rL < 1$ pentru orice r, deci seria $a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n + ...$ este divergentă pentru orice $z \in \mathbb{C}$. Dacă $z = 0$ seria este convergentă, având suma a_0. În acest caz, discul de convergenţă se reduce la punctul $z = 0$.

În concluzie, seria de puteri $a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n + ...$ admite ca mulţime de convergenţă un disc cu centrul în origine (la care se pot adăuga şi unele puncte ale frontierei), numit disc de convergenţă, a cărui rază, numită raza de convergenţă, este dată de formula lui Cauchy-Hadamard:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Pentru orice z, $|z| < R$, seria $a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n + ...$ converge uniform.

Pentru $R = \infty$ discul de convergenţă, este întreg planul $\mathbb{C}$ iar pentru $R = 0$, el se reduce la punctul $z = 0$.

Observaţie. Se ştie că dacă raportul $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ are o limită l când $n \to \infty$, atunci $l = L$, deci în acest caz putem scrie:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \to \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}, \ R = \lim_{n \to \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

Această formulă ne permite să calculăm raza de convergenţă a seriei de puteri în cazul când există limita din membrul drept.

Observaţie. O serie de puteri converge uniform pe orice compact din discul său de convergenţă.

Să arătăm că seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge uniform pe orice disc compact $\overline{U_1} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R_1\}$, $R_1 < R$. Pentru $z \in \overline{U_1}$ avem $|a_n z^n| \leq |a_n| R_1^n$.

Deoarece $R_1 < R$, seria $\sum |a_n| R_1^n$ este convergentă şi aplicând criteriul de convergenţă uniformă, rezultă că seria $\sum a_n z^n$ converge uniform pe $\overline{U_1}$.

Corolar 6.3.2. *Suma unei serii de puteri este o funcţie continuă pe discul de convergenţă.*

Observaţie. Reprezentarea sumei S a unei serii de puteri printr-o serie de puteri este unică.

Să presupunem că pentru orice z, $|z| < R$, avem:

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n.$$

Să notăm $a_n - b_n = c_n$. Pentru $|z| < R$, avem:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = 0.$$

Făcând $z = 0$, rezultă $c_0 = 0$. Deci putem scrie:

$$z(c_1 + c_2 z + ...) = 0, \ |z| < R.$$

Dacă presupunem că $z \neq 0$, $|z| < R$, atunci avem:

$$c_1 + c_2 z + ... = 0.$$

Dar suma seriei de puteri din membrul stâng este o funcţie continuă în discul $U(0, R)$ şi deoarece are limita 0 în origine rezultă că şi valoarea sa pentru $z = 0$ va fi nulă. Deducem $c_1 = 0$. Din aproape în aproape rezultă $c_n = 0$, adică $a_n = b_n$, pentru $n = 1, 2, 3, ...$.

Observaţie. Raza de convergenţă a seriei derivate este egală cu raza de convergenţă a seriei de puteri iniţiale.

Fie $a_1 + 2a_2 z + ... + na_n z^{n-1} + ...$ seria de puteri derivată, adică obţinută din seria $a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_n z^n + ...$ derivând-o termen cu termen.

Observăm că seria este convergentă sau divergentă odată cu seria:

$$a_1 + 2a_2 z + ... + na_n z^{n-1} + ...$$

Notând cu R' raza de convergenţă a seriei derivate, avem:

$$\frac{1}{R'} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n\,|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\,\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}.$$

Deci $R = R'$.

Suma unei serii de puteri este o funcţie olomorfă în discul de convergenţă. Derivata sumei seriei este egală cu suma seriei derivate.

Fie

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \ |z| < R$$

şi să arătăm că pentru orice z, $|z| < R$, funcţia S este derivabilă şi

$$S'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}, \ |z| < R.$$

Punctul $z \in U(0,R)$ fiind fixat, să alegem un R_1 astfel încât $|z| < R_1 < R$. Să considerăm discul compact $\overline{U_1} = \{h \in \mathbb{C} : |z+h| \leq R_1\}$.
Pentru $h \in \overline{U_1}$,$h \neq 0$ putem scrie raportul:

$$\phi(h) = \frac{z+h-S(z)}{h} = \sum_{n=0} a_n \left[(z+h)^{n-1} + (z+h)^{n-2} z + ... + z^{n-1} \right].$$

Deci $\phi : \overline{U_1} - \{0\} \to \mathbb{C}$. Pe de altă. parte, pentru $h \in \overline{U_1}$ avem:

$$|a_n| \left[(z+h)^{n-1} + (z+h)^{n-2} z + (z+h)^{n-3} z^2 + ... + z^{n-1} \right] \leq n |a_n| R_1^{n-1}.$$

Deoarece seria $\sum n a_n R_1^{n-1}$ este convergentă (pentru că $R_1 < R$, iar seria derivată are raza de convergenţă R), rezultă conform criteriului de convergenţă uniformă, că seria de polinoame în h

$$\sum a_n \left[(z+h)^{n-1} + (z+h)^{n-2} z + ... + z^{n-1} \right]$$

este uniform convergentă pe $\overline{U_1}$, iar suma ei va fi o funcţie $\phi_1 : \overline{U_1} \to \mathbb{C}$ continuă pe $\overline{U_1}$ şi în particular pe punctul $h = 0$.
Dar: $\phi|_{\overline{U_1}-\{0\}} = \phi$, adică $h \in \overline{U_1} - \{0\} \Rightarrow \phi_1(h) = \phi(h)$ de unde rezultă că există limita:

$$\lim_{h\to 0} \phi(h) = \lim_{h\to 0} \phi_1(h) = \phi_1(0) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}.$$

Dar

$$\lim_{h\to 0} \phi(h) = \lim_{h\to 0} \frac{S(z+h) - S(z)}{h} = S'(z).$$

Deci funcţia S' este derivabilă pe punctul z şi avem:

$$S' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}.$$

Deoarece z a fost ales arbitrar în discul $U(0,R)$, rezultă că funcţia S este olomorfă în acest disc şi derivata ei este egală cu suma seriei derivate.

O serie tayloriană este de forma:

$$a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + ... + a_n(z-a)^n + ...$$

Punând $\zeta = z - a$ seria devine:

$$a_0 + a_1\zeta + a_2\zeta^2 + ... + a_n\zeta^n + ...$$

Aceasta este o serie de puteri care admite un disc de convergenţă, cu centrul în origine şi de rază R, $\{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < R\}$ unde R este dată de formula:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n\,|a_n|}$$

Rezultă că seria Taylor iniţială converge absolut şi uniform pe orice compact din discul de convergenţă $U(a,R) = \{z : |z-a| < R\}$.

Capitolul 7

Integrala complexă

7.1 Definirea integralei complexe şi proprietăţi

Considerăm $\gamma : I \to \mathbb{C}$ un drum continuu, unde $I = [a, b]$ şi notăm extremităţile acestui drum cu $\alpha = \gamma(a)$ şi $\beta = \gamma(b)$. Vom nota $\gamma = \gamma(I)$. Ordonarea naturală a punctelor din intervalul I induce o ordonare a punctelor de pe γ. Anume, vom spune că punctul $z' = \gamma(t')$ precede punctul $z'' = \gamma(t'')$, pe γ, dacă $t' < t''$. Punând $z = z(t) = x(t) + iy(t)$, $t \in I$, punctul z descrie arcul γ de la α la β, atunci când t descrie intervalul I de la a la b.

Notăm cu γ^- drumul continuu definit de $\gamma^-(t) = (a + b - t), t \in I$, cu alte cuvinte este drumul obţinut din γ schimbând sensul pe parcurs.

Fie drumurile continue $\gamma_1 : I_1 \to \mathbb{C}$, $\gamma_2 : I_2 \to \mathbb{C}$, unde $I_1 = [a_1, b_1]$, $I_2 = [a_2, b_2]$ iar $a_1 = a$ şi $b_1 = a_2$, $b_2 = b$. Atunci vom nota $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ drumul definit de $\gamma(t) = \gamma_1(t)$ dacă $t \in I_1$, respectiv $\gamma(t) = \gamma_2(t)$ dacă $t \in I_2$.

Drumul γ fiind dat, o diviziune d a lui va fi definită de un şir finit de puncte $\alpha = z_0$, z_1,..., z_k,..., $z_n = \beta$, $z_k = \gamma(t_k)$, unde $a = b_0$, t_1,...,t_k,..., $t_n = b$. Vom folosi notaţia $d = (z_0, z_1, ..., z_n)$. Numărul $\nu(d)$ îl vom numi norma diviziunii d.

Drumul γ este un drum rectificabil dacă mulţimea sumelor

$$\sum_{k=0}^{n-1} |z_{k+1} - z_k|$$

corespunzătoare tuturor diviziunilor d ale lui γ are o margine superioară finită, pe care o vom numi lungimea drumului γ şi o vom nota $l(\gamma)$. Dacă $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, $t \in I$, se ştie că pentru a fi rectificabil este necesar şi suficient ca funcţiile $t \to x(t)$ şi $t \to y(t)$ să fie continue şi cu variaţie mărginită.

Să presupunem că drumul continuu γ este rectificabil şi să considerăm o funcţie complexă f definită şi continuă pe $\gamma = \gamma(I)$. Deci $f \in C(\gamma)$. Fie $d = (z_0, z_1, z_2, ..., z_n), z_n = (t_k)$, o diviziune a arcului şi să notăm cu γ_k restricţia lui γ la intervalul $[t_k, t_{k+1}]$. Evident k este un drum continuu cu extremităţile z_k şi z_{k+1}, iar $\gamma = \bigcup\limits_{k=0}^{n-1} \gamma_k$. Să alegem câte un punct pe suportul lui γ_k, $\zeta_k \in \gamma_k$. Aceasta înseamnă că putem scrie $\zeta_k = \gamma\left(\tau_k\right)$ unde $\tau_k \in [t_k, t_{k+1}]$, $k = \overline{0, (n-1)}$. Fie suma integrală

$$S_d = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\zeta_k\right)\left(z_{k+1} - z_k\right)$$

corespunzătoare diviziunii d şi punctelor ζ_k. Considerând diviziuni din ce în ce mai fine, adică făcând $\nu(d) \to 0$, vom arăta că sumele S_d au o limită I dată de $\lim\limits_{\nu(d)\to 0} S_d = I$.

Prin aceasta înţelegem că oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există un $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât oricare ar fi diviziunea d a drumului γ cu $\gamma(d) < \delta$ şi oricum s-ar alege punctele $\zeta_k \in \gamma_k$ să avem $|S_d - I| < \varepsilon$.

Pentru a demonstra existenţa acestei limite, să punem:

$$z = x + iy,\ f\left(z\right) = u\left(x, y\right) + iv\left(x, y\right)$$

$$z_k = x_k + iy_k,\ \zeta_k = \xi_k + i\eta_k$$

$$u_k = u\left(\xi_k, \eta_k\right)\ \ v_k = v\left(\xi_k, \eta_k\right).$$

Atunci separând partea reală şi cea imaginară, putem scrie:

$$S_d = \sum_{k=0}^{n-1}\left[u_k\left(x_{k+1} - x_k\right) - v_k(y_{k+1} - y_k)\right] + i\sum_{k=0}^{n-1}\left[V_k\left(x_{k+1} - x_k\right)U_k\left(y_{k+1} - y_k\right)\right].$$

Deoarece drumul γ este rectificabil, iar funcţiile reale $u = \mathrm{Re} f$ şi $v = \mathrm{Im} f$ sunt continue pe γ, rezultă că cele două sume reale de mai sus au limită două integrale curbilinii. Deci există $\lim S_d = I$, $I = \int\limits_\gamma udx - vdy + i\int\limits_\gamma vdx + udy$.

Această limită se numeşte integrala complexă a funcţiei f de-a lungul drumului γ şi se notează $I = \int f\left(z\right)dz$.

Deci vom putea scrie că

$$\int\limits_\gamma f(z)\,dz = \int\limits_\gamma (u+iv)(dx+idy) = \int\limits_\gamma udx - vdy + i\int\limits_\gamma vdx + udy.$$

Sunt adevărate următoarele proprietăţi:

1. $f_1,\ f_2 \in C(\gamma) \Rightarrow \int\limits_\gamma [f_1(z) + f_2(z)]\,dz = \int\limits_\gamma f_1(z)\,dz + \int\limits_\gamma f_2(z)\,dz.$

2. $f \in C(\gamma),\ k \in \mathbb{C}, \int\limits_\gamma kf(z)\,dz = k\int\limits_\gamma f(z)\,dz.$

3. $\int\limits_{\gamma^-} f(z)\,dz = -\int\limits_\gamma f(z)\,dz.$

4. $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2,\ \int\limits_\gamma f(z)\,dz = \int\limits_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$ (adivitatea în raport cu drumul de integrare).

5. $\left|\int\limits_\gamma f(z)\,dz\right| \leq \int\limits_\gamma |f(z)|\,dz$ unde $|dz| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ este elementul de arc măsurat pe γ, iar integrala din membrul drept este integrala de speţa întâi a funcţiei reale $|f|$ luată pe γ.

Corolar 7.1.1. *Dacă seria* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ *de funcţii continue pe* γ *converge uniform pe* γ *şi are suma* f*, atunci:*

$$\int\limits_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)\right) dz = \sum_{n=0}^{n-1} \int_\gamma f_n(z)\,dz$$

adică seria se poate integra termen cu termen.

Dacă diviziunea d este suficient de fină, putem face ca şi conturul poligonal π să fie în D, $\pi \subset D$, iar integrala unei funcţii continue în D luată pe γ să poată fi aproximată cât vrem de bine cu integrala acestei funcţii luată pe conturul poligonal π. Avem următoarea teoremă:

Teoremă 7.1.2. *Dacă funcţia* f *este continuă în domeniul* D *şi* γ *este un drum continuu rectificabil situat în* D*, atunci pentru orice* $\varepsilon > 0$ *putem găsi un* $\delta(\varepsilon) > 0$*, astfel încât pentru orice diviziune* d *a lui* γ *cu* $\nu(d) < \delta$*, conturul poligonal corespunzător acestei diviziuni să fie situat în domeniul* D *şi să avem:*

$$\left|\int\limits_\gamma f(z)\,dz - \int\limits_\pi f(z)\,dz\right| < \varepsilon.$$

Deoarece curba γ este situată în D, va exista un domeniu Δ compact inclus în D, $\overline{\Delta} \subset D$, aşa încât $\gamma \subset D$. Să notăm $\rho = \rho(\gamma, \partial\Delta)$, $\rho > 0$. Orice disc de rază ρ cu centrul într-un punct oarecare al lui γ va fi situat în $\overline{\Delta}$.

Să fixăm domeniul Δ şi să luăm un $\varepsilon > 0$ arbitrar. Pe mulţimea compactă $\overline{\Delta}$, funcţia f este uniform continuă. Deci lui ε îi va corespunde un număr $\delta_1 > 0$ aşa ca pentru orice pereche de puncte z', $z'' \in \overline{\Delta}$, care satisface condiţia $|z' - z''| < \delta$, să avem

$$|f(z') - f(z'')| < \frac{\varepsilon}{2L}$$

unde L este lungimea drumului γ, $L = l(\gamma)$.

Pe de altă parte, din definiţia integralei complexe rezultă că lui ε îi va corespunde un $\delta_2 > 0$ aşa ca pentru orice diviziune $d = (z_0, z_1, ..., z_n)$ a arcului γ în arcele $\gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_{n-1}$, şi de normă $\nu(d) < \delta_2$ să avem:

$$\left| \int_{\gamma} f(z)\, dz - S \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

unde

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} f(z_k)(z_{k+1} - z_k).$$

Fie $\delta = min\{\rho, \delta_1, \delta_2\}$ şi să fixăm o diviziune d a arcului γ aşa ca $\nu(d) < \delta$. Să notăm cu π linia poligonală corespunzătoare acestei diviziuni (adică conturul poligonal cu vârfurile în punctele de diviziune ale arcului γ).

Fie π laturile acestui contur poligonal ($k = \overline{0, (n-1)}$). Avem

$$\pi = \sum_{k=0}^{n-1} \pi_k.$$

Să arătăm mai întâi că $\pi \subset D$. În adevăr, dacă $z \in \pi_k$, atunci avem

$$|z - z_k| < |z_{k+1} - z_k| \leq l(\gamma_k) < \delta.$$

Deci $|z - z_k| < \rho$ şi avem $z_k \in \gamma$, rezultă $z \in \overline{\Delta}$, adică $z \in D$; deci $\pi_k \subset D$, $k = \overline{0, (n-1)}$, de unde rezultă $\pi \subset D$. Să stabilim acum inegalitatea din enunţ. Avem:

$$\int_{\pi} f(z)\,dz = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\pi_k} f(z)\,dz.$$

Să observăm că

$$f(z_k)(z_{k+1} - z_k) = \int\limits_{\pi_k} f(z_k) dz,$$

deci

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\pi_k} f(z_k)\,dz$$

de unde

$$\left| \int\limits_{\pi} f(z)\,dz - S \right| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_{\pi_k} [f(z) - f(z_k)]\,dz \right| \le \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int\limits_{\pi_k} [f(z) - f(z_k)]\,dz \right|.$$

Dar pentru $z \in \pi_k$, avem $|z - z_k| < \delta \le \delta_1$, iar $z,\ z_k \in \overline{\Delta}$ deci

$$|f(z) - f(z_k)| < \frac{\varepsilon}{2L}$$

de unde:

$$\int\limits_{\pi_k} [f(z) - f(z_k)]\,dz \le \frac{\varepsilon}{2L} |z_{k+1} - z_k| = \frac{\varepsilon}{2L} l(\gamma_k)$$

deci

$$\left| \int\limits_{\pi} f(z)\,dz - S \right| \le \frac{\varepsilon}{2L} \sum_{k=0}^{n-1} l(\gamma_k) = \frac{\varepsilon}{2L} \cdot L = \frac{\varepsilon}{2}$$

de unde

$$\left| \int\limits_{\gamma} f(z)\,dz - \int_{\pi} f(z)\,dz \right| \le \left| \int\limits_{\gamma} f(z)\,dz - S \right| + \left| \int\limits_{\pi} f(z)\,dz - L \right| < \varepsilon.$$

În acest mod am definit integrala complexă pe un arc rectificabil γ. În particular, extremităţile arcului pot să coincidă, adică $\gamma(a) = \gamma(b)$. Vom nota cu C conturul rectificabil şi vom prezenta câteva proprietăţi.

1. Integrala $\int\limits_C f(z)dz$ nu depinde de punctul de plecare ales pe curba C adică

$$\int\limits_{z_0 C z_0} f(z)\, dz = \int\limits_{z_1 C z_1} f(z)\, dz.$$

În adevăr, avem:

$$\int\limits_{z_0 C z_0} f(z)\, dz = \int\limits_{z_0 z_1} f(z)\, dz + \int\limits_{z_1 C z_0} f(z)\, dz$$

de unde rezultă egalitatea de mai sus.

2. Oricare ar fi un contur închis rectificabil din plan avem:

$$\int\limits_C dz = 0, \text{ respectiv } \int\limits_C z dz = 0,$$

3. Dacă $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, iar funcţiile u şi v sunt continue cu derivate parţiale de ordinul întâi continue în domeniul D şi dacă C este o curbă Jordan rectificabilă situată în D împreună cu interiorul său, adică $\overline{(C)} \subset D$, atunci are loc formula

$$\int\limits_C f(z)\, dz = 2i \int\limits_{(C)}\int \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dw,$$

unde dw este elementul de arie.

În adevăr, avem:

$$\int\limits_C f(z)\, dz = \int\limits_C u dx - v dy + i \int\limits_C v dx + u dy.$$

Deoarece funcţiile u şi v au derivate parţiale de ordinul întâi continue în domeniul $\overline{(C)}$, putem aplica formula lui Green celor două integrale curbilinii, transformându-le astfel în două integrale duble. Anume, avem:

$$\int_C f(z)\,dz = -\int_{(C)}\int \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy + i\int_{(C)}\int \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy.$$

Dar

$$2\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

de unde rezultă formula de mai sus.

Noţiunea de integrală complexă permite să se scoată în evidenţă proprietăţile din care vor decurge celelalte proprietăţi este următoarea teoremă, pe care o vom numi teorema fundamentală a lui Cauchy-Goursat.

Teoremă 7.1.3. *Dacă funcţia f este olomorfă în domeniul simplu conex D, atunci integrala acestei funcţii, luată de-a lungul oricărei curbe închise rectificabile C, conţinută în D, este nulă*

$$\int_C f(x) = 0, \text{ pentru } C \subset D.$$

Mai întâi să observăm că această teoremă se poate demonstra imediat în ipoteza că derivata f' este o funcţie continuă în domeniul D, iar C este o curbă Jordan rectificabilă, situată în D. Întradevăr, scriind $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, funcţiile u şi v vor avea derivate parţiale de ordinul I continue în D şi deoarece D este simplu conex rezultă că dacă $C \subset D$, atunci şi $(C) \subset D$. În aceste condiţii se poate aplica formula

$$\int_C f(z)\,dz = \iint_{(C)} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} dw.$$

Funcţia fiind olomorfă în D, avem $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$ în D şi deci $\int_C f(z)\,dz = 0$ şi teorema este demonstrată.

Observaţie. Rezultatul lui Goursat este extrem de important, având în vedere faptul că această teoremă domină întreaga teorie a funcţiilor analitice. Vom vedea mai târziu că, bazându-ne pe această teoremă, o funcţie olomorfă în D admite derivate continue de orice ordin, deci olomorfia funcţiei f implică continuitatea derivatei f'.

Teoremă 7.1.4. *Fie C o curbă Jordan rectificabilă şi f o funcţie definită şi continuă pe domeniul închis $\overline{(C)}$ şi olomorfă în domeniul interior lui C, adică în (C). Atunci:*

$$\int_C f(z)\,dz = 0.$$

Ne vom mărgini la demonstrarea acestei teoreme în cazul când curba C este stelată în raport cu un anumit punct z_0 (adică este întâlnită de orice rază ce porneşte din z_0 într-un singur punct). Printr-o translaţie putem aduce punctul z_0 în origine, deci vom presupune $z_0 = 0$. Să facem substituţia următoare: $z' = (1-\rho)\,z,$ unde $0 < \rho < 1$.

Când z descrie curba C, punctul z' descrie o curbă C' interioară lui C obţinută din C printr-o omotetie de modul $1-\rho$, $(0 < 1-\rho < 1)$. Avem evident:

$$\int_{C'} f(z')\,dz' = 0$$

şi putem deci scrie:

$$I = \int_C f(z)\,dz = \int_C f(z)\,dz - \int_{C'} f(z')\,dz'$$

această formulă fiind valabilă pentru orice ρ, $0 < \rho < 1$. Ţinând seama de substituţia făcută, mai putem scrie:

$$I = \int_C \{f(z) - (1-\rho)\,f[(1-\rho)\,z]\}\,dz =$$

$$= \int_C \{f(z) - f(1-\rho)\,z\}\,dz + \rho\int_C f[(1-\rho)\,z]\,dz.$$

Fie $R = \max\limits_{z\in C}|z|$. Deoarece f este continuă pe $(\overline{C})$, deci şi uniform continuă, rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ putem găsi un $\delta(\varepsilon) > 0$, astfel ca:

$$|f(z) - f[(1-\rho)\,z]| < \varepsilon,$$

pentru orice $z \in C$, aşa ca $|z - (1-\rho)\,z| = |\rho z| \leq \rho R < \delta$, adică pentru orice $\rho < \frac{\delta}{R}$.

Să notăm $M = \max\limits_{z\in(\overline{C})}|f(z)|$ şi L lungimea curbei C. Atunci, dacă $\rho < \frac{\delta}{R}$ avem $|I| < \varepsilon L + \rho M L$. Făcând $\rho \to 0$, deducem $|I| \leq \varepsilon L$ şi cum I nu depinde de ε, rezultă

$$I = \int_C f(z)\, dz = 0.$$

Teorema lui Cauchy-Goursat rămâne valabilă, dacă C este o curbă Jordan rectificabilă conţinută în D împreună cu interiorul său, adică:

$$\int_C f(z)\, dz = 0, \text{ dacă } \left(\overline{C}\right) \subset D.$$

Dacă în interiorul lui C se găsesc componente ale frontierei domeniului D, atunci integrala de-a lungul lui C se poate să nu mai fie nulă, deoarece funcţia f poate să nu mai fie olomorfă în interiorul curbei C.

Considerăm o funcţie f definită şi olomorfă într-un domeniu simplu conex D şi fie γ_0 şi γ_1 două drumuri rectificabile situate în D şi având aceleaşi extremităţi în punctele z_0, $z_1 \in D$. Pe conturul închis $C = \gamma_0 \cup \gamma_1$ se poate aplica teorema fundamentală a lui Cauchy-Goursat şi deci:

$$\int_C f(z)\, dz = \int_{\gamma_0} f(z)\, dz + \int_{\gamma_1} f(z)\, dz = 0$$

de unde deducem:

$$\int_{\gamma_0} f(z)\, dz = \int_{\gamma_1} f(z)\, dz.$$

Această egalitate ne arată că integrala luată de-a lungul celor două drumuri γ_0 şi γ_1 de la z_0 la z_1 are aceeaşi valoare. Proprietatea este valabilă oricum s-ar alege drumurile rectificabile γ_0 şi γ_1 situate în D şi având extremităţile în z_0 şi z_1.

Rezultă deci că integrala luată de-a lungul unui drum continuu rectificabil ce uneşte două puncte z_0 şi z_1 din domeniul simplu conex D nu depinde de acest drum, atâta timp cât el rămâne în domeniul D, ci numai de punctele z_0 şi z_1. În acest caz putem folosi notaţia:

$$\int_{z_0 z_1} f(z)dz = \int_{z_0}^{z_1} f(z)dz = \int_{z_0}^{z_1} f(t)dt.$$

7.2 Drumuri omotope

Definiţia 7.2.1. *Două drumuri γ_0 şi γ_1, situate în domeniul D, având extremităţile comune z_0 şi z_1 se numesc omotope în D cu extremităţile fixe $z_0,\ z_1$, dacă unul din ele se poate deforma în mod continuu în celălalt, fără a ieşi din domeniul D.*

Această definiţie o putem formula mai precis în felul următor: Fie γ_0, $\gamma_1,\ \gamma_k{:}I \to D$, unde $I = [0,1]$. Drumurile $\gamma_0,\ \gamma_1$, vor fi omotope în D cu extremităţile fixe $z_0,\ z_1$ dacă există, o aplicaţie continuă $\varphi : I \times I \to D$ astfel încât oricare ar fi $\lambda \in I,\ \varphi(0,\lambda) = z_0,\ \varphi(1,\lambda) = z_1$ şi oricare ar fi $t \in I,\ \varphi(t,0) = \gamma_0(t), \qquad \varphi(t,1) = \gamma_1(t)$.

Punând, pentru $\lambda \in I$, $\gamma_\lambda(t) = \varphi(t,\lambda)$, oricare ar fi $t \in I$, γ_λ va fi un drum continuu în D cu extremităţile z_0 şi z_1.

Familia de drumuri continue $(\gamma_\lambda)_{\lambda\in I}$ defineşte acea deformare continuă în D de la γ_0 la γ_1 despre care a fost vorba mai sus.

Toate drumurile continue situate în D, cu extremităţile z_0 şi z_1 , se pot împărţi în clase de drumuri omotope. Integrala de la z_0 la z_1 luată pe un anumit drum continuu rectificabil din D nu-şi schimbă valoarea câtă vreme acest drum rămâne în aceeaşi clasă de omotopie.

După cum ştim, drumul continuu $\gamma : [0,1] \to D$ se numeşte închis dacă $\gamma(0) = \gamma(1)$.

Definiţia 7.2.2. *Vom spune că două drumuri continue închise din D, γ_0 şi γ_1 sunt omotope în D ca drumuri închise, dacă există o aplicaţie continuă,*

$$\varphi : I \times I \to D$$

astfel încât oricare ar fi $t \in I$,

$$\varphi(t,0) = \gamma_0(t),\ \varphi(t,1) = \gamma_1(t).$$

În acest caz, pentru orice $\lambda \in I$, drumul γ_λ definit pentru orice $t \in I,\ \gamma_\lambda(t) = \varphi(t,\lambda)$ este un drum închis γ_0, iar familia $(\gamma_\lambda)_{\lambda\in I}$ de drumuri închise defineşte o deformare continuă de la drumul închis γ_0 la drumul închis γ_1.

Dacă în definiţia de mai sus drumul γ_1 se reduce la un punct, adică aplicaţia $\gamma_1 : I \to D$ este o constantă, atunci spunem că drumul γ_0 se contractă într-un punct în domeniul D sau că este nul-omotop în D.

Dacă f este o funcţie olomorfă în D, iar drumurile continue închise rectificabile γ_0 şi γ_1 sunt omotope în D cu drumuri închise atunci:

$$\int_{\gamma_0} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz.$$

Dacă γ_1 se reduce la un punct, evident că:

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = 0.$$

Teorema fundamentală a lui Cauchy-Goursat se poate enunţa astfel:

Dacă drumul închis rectificabil C din D este nul-omotop în D şi f este o funcţie olomorfă în D, atunci:

$$\int_{C} f(z)\,dz = 0.$$

7.3 Funcţia primitivă

Fie f o funcţie olomorfă în domeniul simplu conex D şi z_0 un punct fixat din D. Dacă z este un punct oarecare din D, vom putea defini funcţia $F : D \to \mathbb{C}$ prin:

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta, \;\; z \in D$$

integrala fiind luată pe un drum oarecare rectificabil situat în D cu extremităţile în z_0 şi z. Pentru orice $z \in D$, valoarea $F(z)$ este univoc determinată, deoarece, după cum am văzut, integrala nu depinde de drumul de integrare. Vom arăta acum că funcţia F este olomorfă în domeniul D şi avem:

$$F'(z) = f(z), \;\; z \in D.$$

Pentru aceasta să dăm lui z o creştere Δz aşa ca $z + \Delta z \in D$. Vom avea:

$$F(z + \Delta z) = \int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)\,d\zeta.$$

Deoarece integrarea se poate face de-a lungul oricărui drum situat în D cu extremităţile în z_0 şi $z + \Delta z$, vom considera, acest drum format dintr-un arc

C ce uneşte z_0 cu z şi segmentul de dreaptă, ce uneşte z cu $z + \Delta z$ (dacă $|\Delta z|$ este suficient de mic, acest segment va fi situat în D).

Avem evident:

$$\Delta F = \int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)\, d\zeta - \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\, d\zeta = \int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)\, d\zeta.$$

Mai putem scrie:

$$\Delta F = \int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)\, d\zeta = \int_{z_0}^{z+\Delta z} \left[f(\zeta) - f(z)\, d\zeta + \int_{z_0}^{z+\Delta z} f(z)\, d\zeta \right] =$$

$$= \int_{z_0}^{z+\Delta z} \left[f(\zeta) - f(z)\, d\zeta + f(z)\, \Delta z \right].$$

Deci

$$\frac{\Delta F}{\Delta z} - f(z) = \frac{1}{\Delta z} \int_{z_0}^{z+\Delta z} \left(f(\zeta) - f(z) \right) d\zeta,$$

de unde

$$\left| \frac{\Delta F}{\Delta z} - f(z) \right| = \frac{1}{|\Delta z|} \left| \int_{z_0}^{z+\Delta z} \left[f(\zeta) - f(z) \right] d\zeta \right|.$$

Punctul ζ este situat pe segmentul $[z, z + \Delta z]$. Funcţia fiind olomorfă în D, este în particular continuă în punctul z, deci oricărui $\varepsilon > 0$ îi corespunde un $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât:

$$|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon, \text{ pentru } |\zeta - z| \leq |\Delta z| < \delta.$$

Aplicând formula de majorare, avem:

$$\left| \int_{z_0}^{z+\Delta z} \left[f(\zeta) - f(z) \right] dt \right| < \varepsilon \, |\Delta z| \,, \text{ pentru } |\Delta z| < \delta$$

deci

$$\left|\frac{\Delta F}{\Delta z} - f(z)\right| < \varepsilon, \text{ pentru } |\Delta z| < \delta$$

de unde rezultă existenţa limitei:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta z} = F'(z) = f(z).$$

Observaţie. În demonstraţia de mai sus nu ne-am bazat decât pe continuitatea funcţiei f în domeniul D şi pe independenţa integralei de drum. Astfel putem enunţa rezultatul anterior sub următoarea formă:

Dacă funcţia f este continuă în domeniul D, iar integrala pe orice contur închis rectificabil din D este nulă, atunci funcţia F definită mai sus este olomorfă în D şi $F' = f$. Funcţia F este o primitivă a funcţiei f, deoarece $F' = f$.

Deci, în condiţiile enunţate mai sus, funcţia f admite o primitivă în domeniul D.

Orice altă primitivă ϕ' diferă de F printr-o constantă aditivă. Întradevăr, avem $\phi' - F' = (\phi - F)' = 0$, deci

$$\phi - F = c, \ \phi = F + c.$$

Rezultă că oricare ar fi o primitivă ϕ a funcţiei f avem:

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\, dz = \phi(z_1) - \phi(z_0) = \phi(z)\Big|_{z_0}^{z_1}$$

Ca aplicaţie să calculăm integrala:

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-a}$$

unde γ este un cerc cu centrul în punctul a, integrarea făcându-se în sens direct. Deoarece funcţia nu este olomorfă în vecinătate punctului a, teorema fundamentală a lui Cauchy nu se poate aplica, în acest caz.

Dar funcţia $\frac{1}{z-a}$ este olomorfă în domeniul simplu conex obţinut din planul C făcând o tăietură T de-a lungul unui arc simplu care uneşte punctul a cu ∞. Primitiva funcţiei $\frac{1}{z-a}$ este $\mathrm{Log}(z-a)$, unde pentru funcţia logaritm alegem o ramură oarecare care este olomorfă în domeniul simplu conex astfel format.

Alegând pe γ două puncte z_0 şi z_1 care nu sunt situate pe tăietura T, dar pe care le vom face apoi să se apropie indefinit de cele două borduri ale tăieturii, avem:

$$\int_{z_0}^{z_1} \frac{dz}{z-a} = \operatorname{Log}(z_1 - a) - \operatorname{Log}(z_0 - a) =$$

$$= \ln|z_1 - a| + i\operatorname{Arg}(z_1 - a) - \ln|z_0 - a| - i\operatorname{Arg}(z_0 - a) = i\widehat{z_0\gamma z_1}.$$

Făcând punctele z_0 şi z_1 să tindă pe γ către punctul în care intersectează tăietura T, obţinem:

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i.$$

Dacă f e numai continuă, în domeniul D, atunci integrala pe un contur închis nu mai este în general, nulă. Fie z_0 un punct din D şi C o curbă Jordan rectificabilă situată în D împreună cu interiorul său adică $(\overline{C}) \subset D$, iar $z_0 \in (C)$. Pompeiu defineşte derivata, areolară a funcţiei f în punctul z_0 prin formula:

$$\frac{Df(z_0)}{Dw} = \lim \frac{\frac{1}{2\pi i} \int\limits_C f(z)\, dz}{\frac{1}{\pi} \iint\limits_{(C)} dw}$$

unde limita se ia relativ la curbele C care se contractă în punctul z_0, adică diametrul lor tinde la zero, curbele C conţinând în interior punctul z_0. Dacă presupunem că partea reală şi imaginară a funcţiei f au derivate parţiale de ordinul I continue în D, atunci am văzut că:

$$\int_C f(z)\, dz = 2i \iint_{(C)} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dw$$

şi

$$\frac{Df(z_0)}{Dw} = \lim \frac{\iint_{(C)} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dw}{\iint\limits_{(C)} dw} = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} |_{z=z_0}$$

Deci, în acest caz, derivata areolară în domeniul D este chiar $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$.

Capitolul 8

Formula lui Cauchy şi aplicaţii ale acesteia

8.1 Formula lui Cauchy

Teorema fundamentală a lui Cauchy-Goursat permite să se pună în evidenţă o formulă care stabileşte o legătură între valorile unei funcţii olomorfe luate pe un contur închis şi valorile pe care le ia această funcţie în domeniul limitat de acest contur.

Fie f o funcţie olomorfă, într-un domeniu D şi fie C o curbă Jordan rectificabilă conţinută în D împreună cu interiorul său $\overline{(C)} \subset D$. Considerăm un punct oarecare z din interiorul lui C, $z \in (C)$ şi să considerăm integrala:

$$\int\limits_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

luată de-a lungul conturului C în sens direct. Se vede că funcţia de variabilă complexă,

$$\zeta \mapsto \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$$

este olomorfă în domeniul $D - \{z\}$. Să trasăm un cerc γ cu centrul în punctul z şi de rază r suficient de mică, astfel ca acest cerc să fie conţinut în (C). Curba (C) fiind omotopă cu γ în domeniul $D - \{z\}$, conform teoremei lui Cauchy avem:

$$\int\limits_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int\limits_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

această formulă fiind valabilă pentru orice $r > 0$ suficient de mic. Cum integrala, din primul membru nu depinde de r, rezultă că nici integrala din membrul al doilea nu depinde de r. Mai putem scrie:

$$\int\limits_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int\limits_\gamma \frac{f(z)\, d\zeta}{\zeta - z} + \int\limits_\gamma \frac{f(\zeta) - f(z_0)}{\zeta - z} d\zeta = 2\pi i f(z) + \int\limits_\gamma \frac{[f(\zeta) - f(z)]\, d\zeta}{\zeta - z}.$$

În virtutea continuităţii funcţiei f în punctul z, rezultă că oricărui $\varepsilon > 0$ îi corespunde un $r_0 > 0$, aşa ca $|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$, pentru orice $\zeta \in \gamma$ şi orice $r < r_0$. Atunci

$$\left| \int\limits_\gamma \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \right| < \frac{\varepsilon}{r} 2\pi r = 2\pi\varepsilon,$$

pentru $r < r_0$.

Cum ε este arbitrar, iar integrala, din primul membru al inegalităţii nu depinde de r, rezultă că în mod necesar:

$$\int\limits_\gamma \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta = 0$$

deci

$$\int\limits_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int\limits_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 2\pi i f(z).$$

Am obţinut în definitiv formula, lui Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \;\; z \in (C)$$

care arată că valorile funcţiei olomorfe f luate în punctele din domeniul (C) sunt complet determinate dacă se cunosc valorile acestei funcţii pe frontiera C a acestui domeniu.

Observaţii. 1. Pe baza formulării întărite a teoremei fundamentale, formula lui Cauchy rămâne valabilă şi dacă f este numai continuă pe C şi olomorfă în interiorul lui C.

2. Dacă punctul z este exterior curbei C, atunci funcţia de sub semnul integral este olomorfă în (C) şi deci în acest caz, avem:

$$\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0, \ z \in D - \overline{(C)}.$$

8.2 Integrale de tip Cauchy

Integrala $\frac{1}{2\pi i}\int_C$ care figurează în membrul drept al formulei lui Cauchy, poartă numele de integrala lui Cauchy. În teoria funcţiilor precum şi în anumite probleme la limită ale fizicii matematice, un rol important îl joacă o generalizare foarte naturală a integralei lui Cauchy, pe care o vom numi integrală de tip Cauchy. Numim în acest fel o integrală, de forma:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

unde γ este un drum rectificabil nu neapărat închis, φ este o funcţie definită şi continuă pe γ, iar z este un punct din complementul lui γ, $z \in C - \gamma$. O integrală de tip Cauchy se reduce la o integrală a lui Cauchy dacă:

a)Conturul γ este o curbă Jordan rectificabilă.

b)Funcţia φ este restrângerea la γ a unei funcţii olomorfe într-un domeniu D care conţine curba γ împreună, cu interiorul său.

Un exemplu de integrală de tip Cauchy care nu este o integrală a lui Cauchy este dat de:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \frac{\frac{1}{\zeta}}{\zeta - z} d\zeta.$$

Să notăm $D = C - \gamma$ şi să considerăm funcţia $\phi : D \to C$, definită pentru orice $z \in D$ prin

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Vom arăta acum că funcţia ϕ este olomorfă în deschisul D şi chiar admite în D derivate de orice ordin care sunt toate olomorfe şi se calculează după regula de derivare sub semnul integral.

Pentru demonstraţie vom considera o integrală de forma:

$$\psi(z) = \int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^n} d\zeta, \; n \in \mathbb{N}. \tag{$*$}$$

Fie $z \in D$ fixat şi fie h aşa ca $z + h$ să se găsească în aceeaşi componentă conexă a lui D ca şi z. Avem:

$$\psi(z+n) - \psi(z) = \int_\gamma \varphi(\zeta) \left[\frac{1}{(\zeta - z)^n} \right] d\zeta.$$

Să folosim următoarea identitate:

$$\frac{1}{\zeta - z - n} - \frac{1}{\zeta - z} = \frac{h}{(\zeta - z)^2} + \frac{h^2}{(\zeta - 2)^2 (\zeta - z - h)}.$$

Derivând această identitate de $n-1$ ori în raport cu z, obţinem:

$$\frac{1}{(\zeta - z - h)^n} - \frac{1}{(\zeta - z)^n} = \frac{nh}{(\zeta - z)^{n+1}} + \frac{1}{h^2} (\zeta - z)^{n+1} (\zeta - z - h)^n P_n(\zeta, z, h)$$

unde $P_n(\zeta, z, h)$ este un polinom în $\zeta,\ z$ şi h. Această formulă se poate demonstra prin inducţie.

Ţinând seama de această formulă, avem:

$$\frac{\psi(z+h) - \psi(z)}{h} = n \int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}} + h \int_\gamma \frac{\varphi(\zeta) P_n(\zeta, z, h)}{(\zeta - z)^{n+1} (\zeta - z - n)^n} d\zeta.$$

Să notăm $M = \max\limits_{\zeta \in \gamma} |\varphi(\zeta)|$.

Fie $\varphi = \varphi(z, \zeta)$ şi să presupunem că $|h| < \frac{\varphi}{2}$. Deoarece P_n este o funcţie continuă în ζ şi h, avem $|P_n| < M_1$ pentru $\zeta \in \gamma$ şi $|h| < \frac{\varphi}{2}$. Rezultă că:

$$\left| \int_\gamma \frac{\varphi(\zeta) P_n(\zeta, z, h)}{(\zeta - z)^{n+1} (\zeta - z - h)^n} d\zeta \right| \le \frac{M M_1}{\rho^{n+1} \left(\frac{\rho}{2}\right)^n} L, \; L = l(\gamma).$$

Ţinând cont de această delimitare, deducem că există:

$$\psi(z) = \lim_{h\to 0}\frac{\psi(z+h)-\psi(z)}{h} = n\int\limits_{\gamma}\frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^{n-1}}.$$

Pentru $n = 1$, vedem că funcţia

$$\phi\left(z\right) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\varphi\left(\zeta\right)}{\zeta - z}d\zeta$$

are o derivată în D dată de formula:

$$\phi'\left(z\right) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\varphi\left(\zeta\right)}{\zeta - z}d\zeta,\ z\in D.$$

adică obţinută prin regula derivării sub semnul integral.

Dar integrala din membrul drept este de tipul $(*)$ cu $n = 2$ şi deci există derivata a doua:

$$\phi''\left(z\right) = \frac{2!}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\varphi\left(\zeta\right)}{\left(\zeta - z\right)^{2}}d\zeta,\ z\in D.$$

Continuând indefinit derivarea, ajungem la concluzia că funcţia are în domeniul D derivate de orice ordin date de

$$\phi^{(n)}\left(z\right) = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\varphi\left(\zeta\right)}{\left(\zeta - z\right)^{n+1}}d\zeta,\ z\in D.$$

Aplicând acest rezultat la formula lui Cauchy:

$$f\left(z\right) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C}\frac{f\left(\zeta\right)d\zeta}{\zeta - z}$$

ajungem la concluzia că o funcţie f olomorfă în interiorul curbei simple rectificabile C şi continuă pe C admite în interiorul lui C derivate succesive de orice ordin care sunt toate olomorfe în (C) şi sunt date de:

$$f^{(n)}\left(z\right) = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{C}\frac{f\left(\zeta\right)d\zeta}{\left(\zeta - z\right)^{n+1}},\ n = 0, 1, 2, ...$$

Deoarece pentru orice punct $z \in D$ se poate alege un contur (C), $(\overline{C}) \subset D$, astfel ca $z \in (C)$, obţinem în definitiv următoarea proprietate importantă a funcţiilor olomorfe:

O funcţie f olomorfă în domeniul D admite derivate succesive de orice ordin, care sunt toate olomorfe în domeniul D.

De aici rezultă că partea reală şi cea imaginară a unei funcţii olomorfe în D sunt funcţii indefinit derivabile în acest domeniu.

Observaţie. Evident că în cazul formulei lui Cauchy are loc următoarea proprietate la limită oricare ar fi $\zeta \in C$,

$$\lim_{\substack{z \to \zeta \\ z \in (C)}} f(z) = f(\zeta)$$

adică valorile funcţiei f pe curba C coincid cu valorile limită din interiorul lui C.

Se pune în mod natural următoarea problemă la limită pentru integralele de tip Cauchy: să se găsească valorile limită ale funcţiei $\phi(z)$ pentru $z \to \zeta \in \gamma$ şi în ce condiţii ele coincid cu $\varphi(\zeta)$.

Dacă funcţia f este definită şi continuă în domeniul D şi dacă integrala pe orice contur închis $C \subset D$ este nulă, atunci funcţia f este olomorfă în D.

Pe baza unei observaţii anterioare putem afirma că funcţia $F : D \to C$ definită pentru orice $z \in D$ prin

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\, d\zeta$$

este olomorfă în D, iar $F'(z) = f(z)$.

Dar F fiind olomorfă în D, rezultă că şi derivata $F' = f$ este olomorfă în D şi teorema este demonstrată.

Observaţie. Întrucât proprietatea de olomorfie are un caracter local, este suficient de arătat că funcţia f este olomorfă în orice disc Δ situat în D. Deoarece discul Δ este simplu-conex este suficient ca în ipoteza teoremei lui Morera să se presupună că f este continuă în D şi integrala pe frontiera oricărui triunghi din D este nulă.

Considerăm formula:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}, \;\; z \in (C).$$

Pentru funcţia f continuă pe C, vom pune $M = \max\limits_{\zeta \in C} f(\zeta)$. Notând $\rho = \rho(z, C)$ şi $L = l(C)$, vom avea:

$$\left|f^{(n)}(z)\right| \leq \frac{n!}{2\pi} \frac{ML}{\rho^{n+1}}.$$

Dacă C este un cerc cu centrul în punctul z şi de rază R, atunci $L = 2\pi R$, $\rho = R$ şi deci:

$$\left|f^{(n)}(z)\right| \leq \frac{n!}{R^n} M.$$

Presupunem că în formula lui Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

conturul C este un cerc cu centrul în z şi de rază R situat împreună cu interiorul său în domeniul D, în care funcţia f este definită şi olomorfă (putem presupune de altfel că f este continuă pe C şi olomorfă în discul (C)). Punând $\zeta = z + \mathrm{Re}^{i\theta}$, $0 \leq \theta$ avem $d\zeta = Rie^{i\theta}$. Formula lui Cauchy devine:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f\left(z + \mathrm{Re}^{i\theta}\right) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(\zeta)\, d\theta.$$

Deoarece $ds = Rd\theta$, mai putem scrie:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi R} \int\limits_C f(\zeta)\, ds.$$

Această formulă exprimă aşa-zisa proprietate de medie a funcţiilor olomorfe:

Valoarea funcţiei olomorfe f în punctul z, care este centrul cercului C, este egală cu media aritmetică a valorilor acestei funcţii luate pe cercul C.

8.3 Reprezentarea funcţiilor olomorfe prin serii Taylor

Considerăm f o funcţie definită şi olomorfă în domeniul D şi fie a un punct din D. Punctul a fiind interior, va exista un cerc C cu centrul în a şi de rază R suficient de mică, astfel ca $(\overline{C}) \subset D$. Aceasta se întâmplă dacă se alege $R < \rho(a, \partial D)$. Fie $z \in (C)$. Avem:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Să punem $|z - a| = r$. Atunci $\left|\frac{z-a}{\zeta-z}\right| = \frac{r}{R} < 1$ şi deci putem scrie:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z - (z - a)} = \frac{1}{\zeta - a} \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta-a}} =$$

$$= \frac{1}{\zeta - a} + \frac{z - a}{(\zeta - a)^2} + ... + \frac{(z - a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}} + ...,$$

seria de mai sus fiind o serie de funcţii continue de $\zeta \in C$ şi convergentă uniform pe C. Această proprietate se păstrează dacă înmulţim toţi termenii acestei serii cu $\frac{1}{2\pi i} f(\zeta)$. Seria obţinută se poate integra termen cu termen şi avem:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} d\zeta + ... + \frac{(z - a)^n}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}} + ...$$

Ţinând seama de formulele care dau derivatele succesive ale integralei lui Cauchy, obţinem în definitiv dezvoltarea:

$$f(z) = f(a) + \frac{z - a}{1!} f'(a) + ... + \frac{(z - a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + ... \, .$$

Această serie converge absolut şi uniform pe discul compact $(\overline{C})$, oricare ar fi $R < \rho(a, \partial D)$.

Teorema 8.3.1. *Dacă f este o funcţie olomorfă într-un domeniu D, atunci oricare ar fi punctul $a \in D$ există un disc cu centrul în punctul a, $\Delta(a, R)$, astfel încât pentru orice $z \in \Delta(a, R)$*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n$$

unde:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Cu alte cuvinte, o funcţie olomorfă în domeniul D se poate dezvolta, în serie Taylor în vecinătatea oricărui punct din D.

Reprezentarea funcţiei f prin suma unei serii Taylor în discul $\Delta(a, R)$ este unică.

Pe de altă parte, am văzut că suma unei serii Taylor este olomorfă în discul de convergenţă.

De aici rezultă că o funcţie olomorfă într-un domeniu D se poate defini ca funcţie dezvoltabilă în serie Taylor în vecinătatea oricărui punct al acestui domeniu.

Fie $\mathcal{H}(\Delta)$ familia funcţiilor olomorfe în discul $\Delta = \Delta(a, R)$ şi $\mathcal{A} = \{(a_n)\}$ mulţimea tuturor şirurilor de numere complexe (a_n) astfel încât seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n$ să fie convergentă pentru $|\zeta| < R$.

Teorema 8.3.2. *Există o aplicaţie unică, bijcctivă şi liniară* $L : \mathcal{H}(\Delta) \to \mathcal{A}$, *cu proprietatea că dacă* $f \in \mathcal{H}(\Delta)$ *şi* $L(f) = (a_n)$, *atunci* $z \in \Delta \Rightarrow f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$. *Coeficienţii* a_n *sunt daţi de:*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Observaţii. 1. Dezvoltarea în serie Taylor de mai sus are loc în cel mai mare disc cu centrul în a care este conţinut în D. Dar seria Taylor din membrul drept este o serie de puteri ale lui $(z-a)$ care are un anumit disc de convergenţă cu centrul în a şi de rază $R' \geq \rho(a, \partial D)$. Dacă $R \geq \rho(a, \partial D)$, înseamnă că suma seriei Taylor este definită şi în puncte care sunt în afara domeniului D în care este definită funcţia f. Această observaţie este foarte importantă pentru a da o metodă de prelungire a funcţiei f în afara domeniului D, metodă care va conduce la construirea funcţiei analitice concepută global.

2. Fie f o funcţie raţională, adică $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ unde presupunem că polinoamele P şi Q sunt ireductibile.

Fie $z_1, z_2, ..., z_m$ polii acestei funcţii, adică $Q(z_k) = 0,\ k = 1, 2, ..., m$. Am văzut că f este olomorfă în $C - \{z_1, ..., z_m\}$.

Fie $a \in C - \{z_1, ..., z_m\}$ şi ne punem problema de-a dezvolta această funcţie după puterile lui $(z-a)$. Vom avea:

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = a_0 + a_1(z-a) + ... + a_n(z-a)^n + ... \ .$$

Coeficienţii dezvoltării se pot determina punând $z - a = h$, scriind apoi:

$$P(a+h) = Q(a+h)(a_0 + a_1 h + ... + a_n h^n + ...)$$

şi egalând coeficienţii aceloraşi puteri ale lui h din cei doi membri. Pentru găsirea razei de convergenţă a seriei de mai sus se poate aplica formula lui Cauchy-Hadamard, dar aceasta duce în general la calcule complicate. Să observam însă că această rază de convergenţă este egală cu raza discului maxim cu centrul în punctul a şi conţinut în domeniul $C - \{z_1, ..., z_m\}$, adică este egală cu distanţa de la punctul a la cel mai apropiat dintre punctele z_1,..., z_m. Deci, dacă polinomul Q nu este o serie de convergenţă a seriei de mai sus este totdeauna un număr finit.

În particular, chiar dacă polinoamele P şi Q au coeficienţii reali, iar $Q(x)$ nu se anulează pe axa reală, adică funcţia raţională $\frac{P}{Q}$ este continuă pe toată axa reală, seria:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + ...$$

va avea un interval de convergenţă finit $]-R, R[$ unde $R = |z_0|$ fiind rădăcina cea mai apropiată de origine a ecuaţiei $Q(z) = 0$. În adevăr, în acest caz discul $\{z : |z| < R\}$ este chiar discul de convergenţă al dezvoltării:

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n + ... \, .$$

Dar din teoria seriilor de puteri se ştie că seria $\sum a_n x^n$ diverge în afara discului de convergenţă. În particular, seria $\sum a_n x^n$ va fi divergentă pe intervalele $]-\infty, \ R[$ şi $]R, \infty[$.

8.4 Reprezentarea funcţiilor olomorfe prin serii Laurent

Dezvoltarea în serie Taylor a unei funcţii olomorfe într-un disc se poate generaliza, în cazul unei funcţii olomorfe într-o coroană circulară, obţinându-se dezvoltarea funcţiei într-o serie numită serie Laurent care va cuprinde seria Taylor ca un caz particular. Fie deci funcţia f definită şi olomorfă în coroana $\{z : R_2 < |z - a| < R_1\}$ şi continuă pe frontiera acestei coroane, adică pe cercurile $C_1 = \{z : |z - a| = R_1\}$ şi $C_2 = \{z : |z - a| = R_2\}$.

Această coroană o vom nota pe scurt $(C_1, \ C_2)$. Fie $z \in (C_1, \ C_2)$. Cu ajutorul unei tăieturi de-a lungul unui arc simplu care uneşte un punct de pe C_1 cu un punct de pe C_2 care nu trece prin z, se construieşte un domeniu simplu conex care conţine punctul z şi în care f este olomorfă.

Aplicând formula lui Cauchy conturului format din C_1, C_2 şi cele două borduri ale tăieturii avem:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C1}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C2}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta.$$

Să punem $|z-a| = r$. Dacă $\zeta \in C_1$, atunci

$$\left|\frac{z-a}{\zeta - a}\right| = \frac{r}{R_1} < 1$$

şi putem folosi dezvoltarea:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a - (z+a)} = \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta - a}}\frac{1}{\zeta - a} =$$

$$= \frac{1}{\zeta - a} + \frac{z-a}{(\zeta - a)^2} + ... + \frac{(z-a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}} + ...$$

seria fiind convergentă absolut şi uniform pe C_1. Înmulţind fiecare termen cu $\frac{1}{2\pi i}f(\zeta)$ şi integrând termen cu termen, obţinem:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C1}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = a_0 + a_1(z-a) + ... + a_n(z-a)^n + ...$$

unde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}}d\zeta,\ n = 0, 1, ... \,.$$

Să presupunem acum că $\zeta \in C_2$. În acest caz avem

$$\left|\frac{\zeta - a}{z-a}\right| = \frac{R_2}{r} < 1,$$

şi deci putem folosi dezvoltarea:

$$-\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{z - a - (\zeta - a)} = \frac{1}{z-a}\frac{1}{1 - \frac{\zeta - a}{z-a}} =$$

$$= \frac{1}{z-a} + \frac{\zeta - a}{(z-a)^2} + ... + \frac{(\zeta - a)^{m-1}}{(z-a)^m} + ...$$

seria fiind uniform convergentă pe C_2. Înmulţind cu $\frac{f(\zeta)}{2\pi i}$ şi integrând termen cu termen, obţinem:

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_2}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = \frac{a_{-1}}{z-a} + \frac{a_{-2}}{(z-a)^2} + ... + \frac{a_{-m}}{(z-a)^m} + ...$$

unde

$$a_{-m} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_2} f(\zeta)(\zeta - a)^{m-1}\,d\zeta, \qquad m = 1, 2, ... \,.$$

Am obţinut astfel dezvoltarea în serie Laurent a funcţiei f în coroana $(C_1,\ C_2)$:

$$f(z) = ... + \frac{a_{-m}}{(z-a)^m} + ... + \frac{a_{-1}}{z-a} + a_0 + a_1(z-a) + ... + a_n(z-a)^n + ...$$

unde coeficienţii a_{-m} şi a_n sunt daţi de formulele de mai sus. Să observăm că putem exprima aceşti coeficienţi cu ajutorul unei aceleaşi formule. Pentru aceasta să observăm că un cerc oarecare $C = \{z : |z| = R\}$, $R_2 < R < R_1$ este omotop în coroana $(C_1,\ C_2)$ atât cu C_1 cât şi cu C_2, iar că funcţia $\zeta \mapsto \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^n}$ care figurează sub semnul integral este olomorfă în această coroană pentru orice număr întreg n. Putem scrie deci :

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}},$$

iar dezvoltarea în serie Laurent o putem scrie:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-a)^n\,.$$

Am obţinut deci o dezvoltare a funcţiei f olomorfe în coroana (C_1, C_2) într-o serie de puteri întregi pozitive sau negative a lui $z - a$. Aceasta este seria Laurent care se descompune în două părţi distincte: partea tayloriană formată din puterile nenegative ale lui $z - a$ şi partea principală formată din puterile negative ale lui $z - a$. Dacă partea principală a seriei Laurent este nulă, adică $a_n = 0,\ n = -1, -2, ...,$ atunci seria Laurent se reduce la o serie Taylor, iar suma acestei serii va fi o funcţie în discul (C_1). Să mai observăm că partea principală se poate transforma într-o serie de puteri dacă facem substituţia $z' = \frac{1}{z-a}$. În adevăr se obţine în acest fel seria $a_{-1}z' + a_{-2}(z')^2 + ...$

Putem arăta că o serie Laurent are ca domeniu de convergenţă o coroană circulară şi converge absolut şi uniform pe orice compact din această coroană.

Întradevăr, partea tayloriană are ca domeniu de convergenţă discul de convergenţă $\{z : |z-a| < R_1\}$ şi converge uniform pe orice disc compact $\{z : |z-a| \le r_1 < R_1\}$. Partea principală adusă la forma unei serii de puteri va avea un disc de convergenţă $\{z' : |z'| < R_2'\}$ şi converge uniform pe orice disc compact $\{z' : |z'| \le r_2' < R_2'\}$. Deci partea principală converge pe $\left\{z : |z-a| > \frac{1}{R_2'} = R_2\right\}$ şi convergenţa este uniformă pe orice mulţime $\{z : |z-a| \ge z_2 > R_2\}$. Dacă $R_1 > R_2$, atunci seria Laurent converge în coroana $\{z : R_2 < |z-a| < R_1\}$, convergenţa fiind uniformă pe orice coroană compactă $\{z : R_2 < r_2 \le |z-a| \le r_1 < R_1\}$. Suma seriei va fi olomorfă în această coroană.

Dacă $R_1 = R_2$, seria Laurent poate converge în unele puncte ale cercului $\{z : |z-a| = R_1\}$.

Dacă $R_1 < R_2$, seria Laurent nu converge în nici un punct $z \in C$.

Coeficientul a_{-1} al seriei Laurent joacă un rol special. Pentru a evidenţia acest lucru, să considerăm o curbă Jordan rectificabilă C situată în coroana $(C_1,\ C_2)$ şi conţinând punctul a în interior. Deoarece seria converge uniform pe C, putem s-o integrăm termen cu termen şi obţinem formula:

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i a_{-1}$$

deoarece

$$\int_C (z-a)^n\,dz = \begin{cases} 0, & n \ne -1 \\ 2\pi i, & n = -1 \end{cases}$$

Coeficientul a_{-1} poartă numele de reziduu al funcţiei f relativ la coroana $(C_1,\ C_2)$.

Dezvoltarea unei funcţii olomorfe în coroana $(C_1,\ C_2)$ într-o serie Laurent este unică. Aceasta revine la a arăta că dacă $f = 0$ în $(C_1,\ C_2)$, atunci $a_k = 0$ pentru orice k. Pentru aceasta vom considera funcţia $(z-a)^{-k-1} f(z)$ şi o vom integra pe C. Obţinem $0 = 2\pi i a_k$, deci $a_k = 0$.

Fie $D = (C_1,\ C_2) = \{z : R_2 < |z-a| < R_1\}$ şi $\mathcal{H}(D)$ familia funcţiilor olomorfe în D. Să notăm $\mathcal{A} = \{(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}\}$ cu proprietatea că $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n$ converge pentru $|\zeta| < R_1$ şi $\sum\limits_{n=-1}^{-\infty} a_n \zeta^{-n}$ converge pentru $|\zeta| < \frac{1}{R_2}$.

Teorema 8.4.1. *Exista o aplicaţie unică, bijectivă şi liniară* $L : \mathcal{H}(D) \to \mathcal{A}$ *cu proprietatea că dacă* $f \in \mathcal{H}(D)$ *şi* $L(f) = (a_n)$ *atunci* $z \in D \Rightarrow f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-a)^n$.

8.5 Teorema maximului modulului

Teorema 8.5.1. *Dacă funcţia* $f : \overline{D} \to C$*, neconstantă, este olomorfă în domeniul mărginit* D *şi continuă în* $\overline{D}$*, atunci modulul ei nu îşi poate atinge maximul în* D *şi deci îl atinge pe frontiera lui* D.

Funcţia f fiind continuă pe compactul $\overline{D}$, modulul său îşi va atinge maximul pe $\overline{D}$. Să notăm $M = \max\limits_{z\in\overline{D}} |f(z)| = \|f\|_{\overline{D}}$ şi să presupunem că ar exista puncte din D în care acest maxim este atins. Vom nota cu $E = \{z \in D : |f(z)| = M\}$. Conform ipotezei $E \neq \emptyset$. Dacă $E = D$, atunci ar rezulta $|f(z)| = M$, $z \in D$ şi conform unei proprietăţi cunoscute a funcţiilor olomorfe, ar însemna că f s-ar reduce la o constantă. Deci $E \subset D$ şi va exista cel puţin un punct $z_0 \in D \cap \partial E$. În virtutea continuităţii avem, $|f(z_0)| = M$.

Deoarece $z_0 \in \partial E$, putem construi un cerc C cu centrul în z_0 şi de rază r suficient de mică care să fie conţinut împreună cu interiorul în D şi astfel ca pe acest cerc să existe cel puţin un punct z_1 care să nu aparţină mulţimii E. Atunci $|f(z_1)| < M$. În virtutea continuităţii funcţiei f pentru un anumit $\varepsilon > 0$ convenabil ales (anume $\varepsilon < M - |f(z_1)|$), putem găsi un arc C_1 al cercului C conţinând punctul z_1 aşa încât $z \in C_1 \Rightarrow |f(z)| \leq M - \varepsilon$.

Fie $C_2 = C - C_1$. Avem $z \in C$, atunci $z = z_0 + re^{i\theta}$. Conform teoremei de medie a funcţiilor olomorfe

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi r} \int\limits_C f(z)\, ds = \frac{1}{2\pi r} \int\limits_{C_1} f(z)\, ds + \int\limits_{C_2} f(z)\, ds$$

unde $ds = rd\theta$ este elementul de arc pe cercul C. Luând valorile absolute, deducem:

$$M = |f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi r} \left[(M-\varepsilon) L_1 + M L_2\right] = M - \frac{\varepsilon L}{2\pi r}$$

unde L_1 şi L_2 sunt lungimile arcelor C_1 şi C_2. Inegalitatea obţinută nu este posibilă. Deci în mod necesar $E = \emptyset$ şi teorema este demonstrată.

Lema 8.5.2.(Lema lui Schwarz) *Dacă funcţia* f *definită pe discul compact* $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$ *este olomorfă pe discul* $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ *şi* $f(0) = 0$, *iar*

$$|f(z)| \leq M, \ pentru |z| \leq R,$$

atunci

$$|f(z)| \leq \frac{M}{R}|z| \ \ pentru |z| \leq R \ şi \ \ |f'(0)| < \frac{M}{R}.$$

Egalitatea $|f(z)| = \frac{M}{R}|z|$ *într-un punct* z, $|z| < R$, *este posibilă numai în cazul funcţiei* $f(z) = \frac{M}{R}e^{i\theta}z$.

Funcţia f fiind olomorfă în $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ se dezvoltă în acest disc într-o serie Taylor:

$$f(z) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}z + ..., \ |z| < R.$$

Funcţia φ definită pe acest disc prin:

$$\varphi(z) = \frac{f(z)}{z} = f'(0) + \frac{f''(0)}{2}z + ... \text{ pentru } z \neq 0$$

şi $\varphi(0) = f'(0)$ este olomorfă în acest disc. Fie un r fixat, $0 < r < R$. Maximul modulului funcţiei φ relativ la discul compact $\{z : |z| \leq r\}$ este atins pe cercul $\{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$. Deci:

$$|\varphi(z)| = \frac{|f(z)|}{|z|} \leq \frac{M}{r} \text{ pentru } |z| \leq r, \ |\varphi(0)| \leq \frac{M}{r}.$$

Făcând $r \to R$, se deduce:

$$|\varphi(z)| \leq \frac{M}{R}, \text{ deci } |f(z)| \leq \frac{M}{R}|z|, \ |f'(0)| \leq \frac{M}{R}.$$

Dacă pentru un z, $|z| < R$, are loc egalitatea $|\varphi(z)| = \frac{M}{R}$, atunci funcţia φ se reduce la o constantă şi deci:

$$\varphi(z) = \frac{M}{R}e^{i\theta}, \text{ adică } f(z) = \frac{Me^{i\theta}}{R}z.$$

Lema 8.5.3. *Dacă* f *este o funcţie olomorfă în* D, *care nu se reduce la funcţia 0, atunci zerourile sale în domeniul* D *sunt puncte izolate.*

Un punct $a \in D$ se numeşte zero al funcţiei f dacă $f(a) = 0$.

Dacă în vecinătatea punctului a funcţia f nu este identic nulă, atunci dezvoltarea sa tayloriană după puterile lui $(z-a)$ va avea cel puţin un coeficient diferit de zero, deci:

$$f(z)=a_p(z-a)^p+...,\ a_p=\frac{f^{(p)}(a)}{p!}\neq 0$$

adică în vecinătatea punctului a funcţia f se poate scrie sub forma:

$$f(z)=(z-a)^p\varphi(z)$$

unde $\varphi(z)=a_p+a_{p+1}(z-a)+...$ este o funcţie definită şi olomorfă în vecinătatea lui a, iar $\varphi(a)\neq 0$. Să arătăm că în acest caz punctul a este un zero izolat. Dacă n-ar fi aşa, ar exista un şir de zerouri (z_n), adică $f(z_n)=0$ şi $z_n\to a$, $z_n\neq a$. Atunci în mod necesar $\varphi(z_n)=0$. Deoarece φ este continuă în punctul a va rezulta $\varphi(a)=0$, ceea ce este contradictoriu.

Mai pot exista în domeniul D zerouri pe care le putem numi zerouri inferioare, adică zerouri în vecinătatea cărora funcţia f este identic nulă. Domeniul D îl vom descompune în următoarele două submulţimi: A formată din punctele $z\in D$ pentru care $f(z)\neq 0$ şi zerourile izolate din domeniul D; B formată din zerourile interioare.

Avem $D=A\cup B$ şi $A\cap B=\emptyset$.

Deoarece f nu este identic nulă în D, rezultă $A\neq 0$. Să presupunem că şi $B\neq 0$. Atunci, deoarece D este conex, vom avea sau $A'\cap B\neq\emptyset$ sau $A\cap B'\neq\emptyset$. Dacă ar exista, $\alpha\in A'$ şi $\alpha\in B$, atunci α va fi un zero interior şi nu ar putea fi punct de acumulare al mulţimii A. Dacă ar exista un $\beta\in B'$ şi $\beta\in A$ atunci ar fi un punct de acumulare de zerouri şi nu ar putea fi un zero izolat. Deci în ambele cazuri ajungem la o contradicţie ceea ce ne arată că în mod necesar $B=\emptyset$ şi deci $D=A$ şi lema e demonstrată.

În continuare vom prezenta teorema identităţii funcţiilor olomorfe.

Teorema 8.5.4. *Dacă funcţiile f şi g sunt definite şi olomorfe pe un domeniu D şi dacă restrângerile lor relative la o submulţime E a domeniului D care are cel puţin un punct de acumulare în domeniul D sunt egale, atunci funcţiile f şi g sunt egale.*

Deci $f\,|_E=g\,|_E\Rightarrow f=g$.

Pe baza ipotezei $E'\cap D\neq 0$ şi $f(z)=g(z)$ pentru $z\in E$. Să notăm $F=f-g$ care este o funcţie olomorfă în D şi $F(z)=0$ pentru $z\in E\,(F\,|E=0)$. Fie $\alpha\in E'$ şi $\alpha\in D$; deoarece F este continuă în punctul α, rezultă $F(\alpha)=0$. Deci a este un zero neizolat al funcţiei F, ceea ce arată că în mod necesar trebuie să avem $F(z)=0$ pentru $z\in D$, adică $f=g$.

Observaţii. 1. Teorema unicităţii funcţiilor olomorfe ne arată că o funcţie olomorfă într-un domeniu este perfect determinată dacă se cunosc valorile ei pe o submulţime a acestui domeniu care are cel puţin un punct de acumulare interior domeniului, de exemplu, un arc de curbă.

2. Dacă funcţiile f şi g olomorfe în D coincid într-un punct al domeniului D, împreună cu toate derivatele, atunci ele sunt egale. Întradevăr în acest caz seriile tayloriene în care se dezvoltă f şi g coincid într-un anumit disc cu centrul în punctul respectiv.

Capitolul 9

Prelungirea analitică

Fie f o funcţie definită şi olomorfă într-un domeniu D. O problemă naturală care se pune este de a vedea dacă această funcţie nu se poate prelungi în afara domeniului D printr-o funcţie olomorfă într-un domeniu mai larg, adică de a vedea dacă există o funcţie $\widetilde{f}$ definită şi olomorfă într-un domeniu $\widetilde{D} \supset D$ aşa încât $\widetilde{f}\,|_D = f$. O astfel de funcţie, dacă există, se va numi prelungirea analitică a funcţiei f de la domeniul D la domeniul D. Pe baza teoremei identităţii funcţiilor olomorfe, o astfel de prelungire, dacă există, este unică.

Fie f o funcţie olomorfă în domeniul D_f şi g o funcţie olomorfă în D_g şi să presupunem că $D_f \cap D_g \neq \emptyset$ şi că $z \in D_f \cap D_g \Rightarrow f(z) = g(z)$. În acest caz, vom spune că funcţia g prelungeşte analitic funcţia f din domeniul D_f în domeniul D_g şi invers.

Funcţia $\widetilde{f}$ definită pe domeniul $\widetilde{D} = D_f \cup D_g$ prin:

$$\widetilde{f}(z) = \begin{cases} f(z), & z \in D_f \\ g(z), & z \in D_g \end{cases}$$

va fi o prelungire analitică atât a funcţiei f cât şi a funcţiei g.

Pentru a construi o funcţie analitică oarecare vom porni de la o serie tayloriană $a_0 + a_1(z-a) + ... + a_n(z-a)^n + ...$.

Evident, această serie este definită de punctul $a \in \mathbb{C}$ şi de şirul (a_n) al coeficienţilor. Singura condiţie la care este supus şirul (a_n) este ca raza de convergenţă a seriei să fie pozitivă, deci seria va admite un disc de convergenţă $\Delta(a, R)$. Să notăm $\Gamma = \partial\Delta(a, r)$ şi

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n, |z-a| < R.$$

S va fi o funcţie olomorfă în discul (Γ).

Perechea ordonată (a, S) o vom numi element analitic. Acest element este deci perfect determinat de punctul $a \in \mathbb{C}$ şi de şirul (a_n).

Să alegem un punct $b \in (\Gamma)$ şi să dezvoltăm funcţia S în vecinătatea lui b.

Vom avea:

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S^{(n)}(b)}{n!} (z-b)^n .$$

Această dezvoltare este valabilă în discul maxim (Γ') cu centrul în b şi conţinut în discul (Γ), adică în interiorul cercului Γ' cu centrul în B şi care este tangent la Γ, deci de rază $R - |a-b|$. Dar seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n (z-b)^n$ unde $b_n = \frac{S^{(n)}(b)}{n!}$ va avea, o rază de convergenţă R_b, care verifică inegalităţile:

$$R - |a-b| \leq R_b \leq R + |a-b| .$$

Să notăm cu (Γ_b) discul de convergenţă al acestei serii. Punând:

$$T(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-b)^n , z \in (\Gamma_b)$$

funcţia va fi olomorfă în (Γ_b). Avem astfel definit un nou element (b, T). Deoarece $b \in (\Gamma)$, iar $z \in (\Gamma) \cap (\Gamma_b) \Rightarrow S(z) = T(z)$ vom spune că elementul (b, T) este o prelungire directă a elementului (a, S). Să observăm că funcţia T este perfect determinată, dacă se cunoaşte elementul iniţial (a, S) şi punctul $b \in (\Gamma)$. De aceea vom pune $T = S_b$.

Dacă $R_b = R - |a-b|$, funcţia S_b va prelungi analitic funcţia S în afara discului (Γ). Putem defini funcţia $f : (\Gamma) \cup (\Gamma_b) \to \mathbb{C}$ prin:

$$f(z) = \begin{cases} S(z), & z \in (\Gamma) \\ S_b(z), & z \in (\Gamma_b) . \end{cases}$$

Vom mai scrie simbolic $f = S \cup S_b$.

Funcţia f va fi o prelungire analitică a lui S de la (Γ) la $(\Gamma) \cup (\Gamma_b)$. Vom presupune acum că punctul b descrie discul (Γ). Să arătăm că funcţia $F = \bigcup\limits_{b \in (\Gamma)} S_b$, este olomorfă în domeniul $D = \cup(\Gamma_b), b \in (\Gamma)$.

Prin definiţie, dacă $z \in \cup(\Gamma_b)$, deci există cel puţin un $b \in (\Gamma)$ aşa ca $z \in (\Gamma_b)$ atunci $F(z) = S_b(z)$.

Pentru ca F să fie univoc definită este suficient să arătăm că, dacă considerăm două elemente (b, S_b), (c, S_c) cu $(\Gamma_b) \cap (\Gamma_c) = A \neq \emptyset$, atunci $z \in A \Rightarrow S_b(z) = S_c(z)$.

Notând R_b şi R_c razele de convergenţă ale celor două elemente avem $|b - c| < R_b + R_c$.

Fie

$$\alpha = \frac{bR_c + cR_b}{R_c + R_b}.$$

Avem $\alpha \in (\Gamma) \cap A$.

Într-o vecinătate a lui α, $V(\alpha)$, avem $S_b|_V = S_c|_V = S|_V$. Deci $S_b|_V = S_c|_V$, de unde rezultă că $S_b A = S_c|_A$.

Să considerăm acum cazul când pentru un punct $b \in (\Gamma)$ avem $R_b = R - |a - b|$. În acest caz, cercul Γ_b, va fi tangent la cercul Γ într-un punct σ.

Punctul σ se va numi punct singular, deoarece nu va exista nici o prelungire a lui S care să fie olomorfă într-o vecinătate a lui σ. În adevăr, dacă ar exista, un disc cu centrul în σ, (Γ_σ) şi o funcţie F care să fie olomorfă în $(\Gamma) \cup (\Gamma_\sigma)$ şi $F\big|_{(\Gamma)} = S$, atunci dezvoltarea funcţiei F după puterile lui $z - b$ ar fi valabilă în interiorul unui cerc Γ' cu centrul în b şi care trece prin punctele de intersecţie ale cercurilor Γ şi Γ_σ. Evident că discul (Γ') este mai mare decât (Γ_b) şi deoarece $F(z) = S(z)$ pentru $z \in (\Gamma)$ avem

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - b)^n.$$

Deducem că raza R_b nu poate fi raza de convergenţa, a elementului (b, S_b).

Să arătăm că pe cercul de convergenţă al unui element (a, S) se găseşte cel puţin un punct singular.

Intradevăr, dacă pe Γ nu s-ar găsi nici un punct singular, atunci oricare ar fi punctul $z \in \Gamma$ se va găsi un $b \in (\Gamma)$, aşa ca $z \in (\Gamma_b)$. Discurile (Γ_b) astfel puse în evidenţă formează o acoperire a cercului Γ, din care se va extrage o acoperire finită. Reuniunea, acestor discuri formează un domeniu situat în $D = \bigcup_{b \in (\Gamma)} (\Gamma_b)$ şi care conţine cercul Γ. Rezultă că în domeniul D se poate include un disc cu centrul în a şi de o rază mai mare decât R, ceea ce ar contrazice faptul că R este raza de convergenţă a elementului (a, S).

Dacă pentru orice b din discul (Γ) avem $R_b = R - |a - b|$, rezultă că orice punct de pe Γ va fi singular. În acest caz, $D = (\Gamma)$ şi $f = S$, deci elementul (a, S) nu se poate prelungi în afara discului (Γ).

9.1 Prelungirea de-a lungul unui drum

Să notăm cu ε mulţimea tuturor elementelor $e = (a, S)$. Fie $\gamma : I \to \mathbb{C}$, $I = [0, 1]$ un drum continuu. O aplicaţie $\pi : I \to \varepsilon$, $I = [0, 1]$ o vom numi prelungire de-a lungul lui γ, dacă:

1) *oricare ar fi* $t \in [0, 1]$, $\pi(t)$ *are prima componentă* $\gamma(t)$, *adică* $\pi(t) = (\gamma(t), S_t)$,

şi

2) *oricare ar fi* $t \in [0, 1]$, *există* $V(t)$, *astfel încât pentru* $s \in V(t)$, $\pi(s)$ *să fie o prelungire directă a lui* $\pi(t)$.

Să observăm mai întâi că, dacă π_1 şi π_2 sunt două prelungiri de-a lungul lui γ, atunci sau $\pi_1 = \pi_2$, sau oricare ar fi $t \in I$, $\pi_1(t) \neq \pi_2(t)$. Aceasta rezultă din faptul că mulţimile $\{t \in I; \pi(t) = \pi_2(t)\}$ şi $\{t \in I; \pi_1(t) \neq \pi_2(t)\}$ sunt ambele deschise în I. Dacă amândouă ar fi nevide, am avea o descompunere disjunctă a mulţimii conexe I în două mulţimi deschise, ceea ce este imposibil.

În mulţimea ε a elementelor vom introduce următoarea relaţie de echivalenţă:

Vom spune că două elemente (a, S) şi (b, T) sunt echivalente dacă există un drum $\gamma : I \to \mathbb{C}$ de la a la b, adică $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$ şi o prelungire π de-a lungul lui γ aşa ca $\pi(0) = (a, S)$ şi $\pi(1) = (b, T)$.

Ne putem convinge uşor că aceasta este într-adevăr o relaţie de echivalenţă.

Rezultă că mulţimea elementelor ε va putea fi împărţită în clase de echivalenţă. O astfel de echivalenţă va defini o funcţie analitică.

Cu alte cuvinte, o funcţie analitică F va fi concepută ca o mulţime de elemente care sunt echivalente între ele. Funcţia f va fi perfect determinată dacă cunoaştem unul dintre elementele sale.

Deci spaţiul funcţiilor analitice este spaţiul cât al spaţiului ε prin relaţia de echivalenţă introdusă mai sus.

Fie $e = (a, S)$ un element dat şi fie $\gamma : I \to \mathbb{C}$, $\gamma(0) = a$ un drum oarecare ce porneşte din a. Pornind de la elementul e, vom încerca să efectuăm prelungirea sa de-a lungul drumului γ. Dacă aceasta prelungire este posibilă, atunci în punctul $\gamma(1) = b$ vom ajunge cu un element (b, U) echivalent cu elementul (a, S). Se spune că punctul b este atins prin prelungire de-a lungul drumului γ.

Putem avea însă şi următoarea situaţie: pe curba γ există un punct σ, deci pe intervalul I există un punct τ cu $\sigma = \gamma(\tau)$, astfel încât să existe o aplicaţie $\pi : [0, \tau] \to \mathbb{C}$ ca pentru orice τ', $0 < \tau' < \tau$, $\pi\big|_{[0,\tau']}$ să fie o prelungire a elementului (a, S) de-a lungul drumului $\gamma_{[0,\tau']}$, dar nu există o prelungire a acestui element de-a lungul drumului $\gamma\big|_{[0,\tau]}$. Deci punctul σ nu poate fi atins prin prelungire de-a lungul lui γ, dar orice punct situat pe γ între a şi γ este atins prin prelungire de-a lungul lui γ. În acest caz, vom spune că punctul γ este un punct singular pus în evidenţă prin prelungire de-a lungul lui γ. Vom mai spune că drumul γ este un drum de singularitate. Domeniul de existenţă al funcţiei analitice generate de elementul (a, S), numit şi domeniu weierstrassian, va fi acoperit de discurile elementelor din clasa, respectivă. Punctele singulare vor fi acele puncte ale frontierei domeniului de existenţă care sunt accesibile din acest domeniu printr-un drum continuu.

9.2 Funcţia olomorfă ca parte a unei funcţii analitice

Fie $f : D \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă în domeniul D. Am văzut că oricare ar fi un punct $a \in D$, funcţia f se poate reprezenta într-un disc $\Delta(a, R)$ cu centrul în punctul a, prin suma S a unei serii tayloriene. Deci funcţia f se va reprezenta în discul $\Delta(a, R)$ prin elementul $e = (a, S)$, adică $z \in \Delta(a, R) \Longrightarrow f(z) = S(z)$.

Se poate arăta uşor că toate elementele (a, S), când a descrie domeniul D, se găsesc în aceeaşi clasă de echivalenţă. Cu alte cuvinte, o funcţie olomorfă într-un domeniu D va fi o parte a unei funcţii analitice.

Întradevăr, fie două elemente (a, S) şi (b, U) două elemente care reprezintă funcţia f în vecinătatea punctului $a \in D$, respectiv $b \in D$.

Fie $\gamma : I \to D$ un drum continuu rectificabil situat în D, cu extremităţile a şi b. Deoarece $\rho = \rho\,(\gamma, \partial D) > 0$ orice element e cu centrul într-un punct de pe γ care reprezintă funcţia f în vecinătatea acelui punct va avea o rază $R \geq \rho$. Mulţimea E a acestor elemente va defini o prelungire de la elementul (a, S) la elementul (b, U), de-a lungul lui γ în felul următor: pentru orice $t \in [0, 1]$ vom alege ca $\pi(t)$ elementul $e \in E$ care are centrul în punctul $\gamma(t)$.

Rezultă că elementul (a, S) şi (b, U) sunt în aceeaşi clasă de echivalenţă.

Conform definiţiilor date noţiunile de punct atins şi de punct singular depind de drumul de-a lungul căruia se efectuează prelungirea. Deci, chiar dacă un anumit punct este atins prin prelungire de-a lungul a două drumuri distincte, s-ar putea ca cele două elemente obţinute prin prelungire cu centrele în punctul considerat să nu coincidă.

O funcţie analitică f este uniformă dacă oricare ar fi drumul de prelungire în orice punct atins se obţine acelaşi element. Aceasta înseamnă că f ia o valoare univoc determinată, în orice punct al domeniului de existenţă. De aceea domeniul de existenţă al unei funcţii uniforme este un domeniu univalent.

O funcţie analitică f care nu este uniformă, se numeşte multiformă. În acest caz, există cel puţin un punct atins astfel încât prin prelungire de-a lungul a două drumuri să obţinem în acel punct două elemente distincte.

Deoarece toate seriile derivate ale unei serii de puteri au acelaşi disc de convergenţă rezultă că dacă funcţia analitică f este uniformă şi are domeniul de existenţă D care este univalent, atunci toate derivatele f', f'', ... au acelaşi domeniu de existenţă, deci şi mulţimea singulară S este aceeaşi pentru toate aceste funcţii.

Proprietăţile de uniformitate, respectiv multiformitate, ale unei funcţii analitice sunt proprietăţi globale, adică privesc funcţia analitică concepută global. Astfel, o ramură a unei funcţii analitice multiforme ar putea fi uniformă.

Numim punct critic din plan cu proprietatea că în orice vecinătate a acestui punct o ramură a funcţiei analitice este multiformă.

Teorema 9.2.1.(monodromiei). *Orice ramură a unei funcţii analitice corespunzătoare unui domeniu D simplu conex, care nu conţine nici o singularitate a funcţiei analitice, este uniformă, deci olomorfă in D.*

Demonstraţie. Fie D domeniul simplu conex în care este definită ramura unei funcţii analitice şi e_0 elementul cu centrul în $z_0 \in D$. Fie $z_1 \in D$, $z_1 \neq z_0$. Trebuie să ararăm că făcând prelungirea din z_0 în z_1 de-a lungul a două drumuri oarecare γ_0 şi γ_1 din D, ajungem în z_1 cu acelaşi element. Deoarece domeniul D nu conţine puncte singulare, rezultă că punctul z_1 este atins prin prelungire de-a lungul oricărui drum din D. Fie $z = \gamma_0(t)$ şi $z = \gamma_1(t)$, $t \in [0, 1]$ ecuaţiile curbelor γ_0, γ_1 şi $\gamma_0(0) = \gamma_1(0) = z_0$, $\gamma_0(1) = z_1$. Deoarece D este simplu conex drumurile γ_0 şi γ_1 sunt omotope în D ca drumuri cu extremităţi fixe. Deci va exista o familie de drumuri γ_λ situate în D cu extremităţile fixe z_0 şi z_1 de ecuaţie $z = \varphi(t, \lambda)$, $t \in [0, 1]$, funcţia $\varphi : I \times I \to D$ fiind continuă şi $\varphi(0, \lambda) = z_0$, $\varphi(1, \lambda) = z_1$; $\varphi = (t, 0) = \gamma_0(t)$, $\varphi(t, 1) = \gamma_1(t)$.

Conform observaţiei anterioare, fiecărui $\lambda \in [0, 1] = I$ îi va corespunde un număr $\delta = \delta(\lambda)$, astfel încât pentru orice $\lambda \in (\lambda - \delta, \lambda + \delta) \cap I$, prelungirea pe γ_λ duce de la e_0 la acelaşi element e_1 în punctul z_1. Sistemul de intervale $(\lambda - \delta, \lambda + \delta)$, $\lambda \in I$, formează o acoperire a intervalului compact I şi conform teoremei lui Borel-Lebesgue, există un număr finit de astfel de intervale care acoperă pe I. Deoarece aceste intervale sunt deschise, două consecutive trebuie să aibă puncte comune. De aici rezultă că pentru două astfel de intervale, prelungirea pe $\gamma\lambda$ trebuie să ducă în z_1 la acelaşi element. Cum avem numai un număr finit de intervale din aproape în aproape, deducem că pentru orice $\lambda \in I$ prelungirea pe $\gamma\lambda$ duce la acelaşi element în z_1 şi teorema este demonstrată.

Teorema 9.2.2. (Poincaré-Volterra). *O funcţie analitică nu poate avea* *într-un punct atins al ei decât cel mult o infinitate numărabilă de determinări. Aceasta înseamnă că toate elementele al căror centru se proiectează în acelaşi punct din plan nu pot fi decât cel mult o infinitate numărabilă.*

Demonstraţia acestei teoreme este bazată pe observaţia că pentru a obţine toate elementele cu centrul z_1, este suficient să facem prelungirile numai de-a lungul liniilor poligonale ce unesc punctele z_0 şi z_1. Mai mult, aceste linii poligonale pot fi alese astfel încât vârfurile lor să aibă, coordonate raţionale. Dar se poate vedea uşor că mulţimea tuturor acestor linii poligonale este numărabilă, de unde rezultă enunţul teoremei.

Capitolul 10

Singularităţile ramurilor uniforme ale funcţiilor analitice

10.1 Puncte speciale

Considerăm D un domeniu care defineşte o ramură uniformă f a unei funcţii analitice.

Punctul $a \in D$ este ordinar pentru f dacă există un element al lui f cu centrul pe a, (a, S), $f(z) = S(z)$, adică dacă există o vecinătate a acestui punct în care f este olomorfă.

Dacă a este ordinar pentru f şi dacă $f(a) \neq 0$, atunci a este ordinar şi pentru funcţia $\frac{1}{f}$. Întradevăr în acest caz există o vecinătate a punctului a în care $S(z) = f(z) \neq 0$ şi deci în această vecinătate $\frac{1}{f} = \frac{1}{S}$ va fi o funcţie olomorfă. Funcţia $\frac{1}{f}$ se obţine din elementul $\left(a, \frac{1}{S}\right)$ făcând prelungirile în lungul drumului din D.

Punctul $a \in D$ este un zero al funcţiei f dacă este ordinar pentru f şi $f(a) = 0$. Dacă f nu este identic nulă, atunci zerourile lui f sunt puncte izolate, iar în vecinătatea unui astfel de zero funcţia f se poate scrie sub forma $f(z) = (z - a)^p \varphi(z), p \geq 1$ unde φ este o funcţie olomorfă în vecinătatea lui a şi $\varphi(a) \neq 0$. Dacă $p = 1$, atunci $z = a$ este un zero simplu iar dacă $p > 1$, atunci $z = a$ este un zero multiplu de ordinul p.

Vom nota cu G mulţimea punctelor ordinare din domeniul D şi formează un domeniu.

Conform definiţiei dată anterior, un punct $a \in D$ este singular pentru f dacă nu este ordinar şi este accesibil din G printr-un drum continuu rectificabil. Dacă notăm cu S mulţimea punctelor singulare din D ale funcţiei f şi $\Delta =$

$D - G$, atunci S este formată din acele puncte ale frontierei lui Δ care sunt accesibile din G.

Astfel un punct singular nu este ordinar, dar este punct ele acumulare de puncte ordinare.

Un caz simplu de singularităţi, dar cel mai important, este cel al punctelor singulare izolate.

Punctul singular $z = a \in D$ este singular izolar dacă există o vecinătate a sa în care nu se mai găseşte nici un punct singular al funcţiei f diferit de a.

Să observăm că dacă S este formată numai din puncte izolate, atunci avem $S = \Delta = D - G$, deoarece în D, neexistând alte puncte singulare decât cele izolate, fiecare punct din Δ va fi izolat, deci accesibil din G.

Instrumentul de bază pentru reprezentarea şi studiul comportării ramurii uniforme f în vecinătatea unui punct singular izolat îl constituie seria lui Laurent.

Dacă $z = a \in D$, $a \neq \infty$ este un punct singular izolat pentru f, atunci există o coroană circulară (C, γ) cu centrul în punctul a în care f să fie olomorfă, deci se poate dezvolta în serie Laurent:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n,$$

care converge absolut şi uniform pe orice compact din această coroană. Presupunând că nici pe cercul C nu există alte puncte singulare, deci $C \subset G$, atunci

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz.$$

Cum dezvoltarea de mai sus este valabilă oricât de mică ar fi raza cercului γ, rezultă că, făcând pe $r \to 0$, ea rămâne valabilă, seria Laurent fiind absolut şi uniform convergentă pe orice compact în coroana $(C, a) = (C) - \{a\}$. Deci seria Laurent de mai sus reprezintă funcţia f pentru $z \in (C, a)$. Să observăm că, dacă $z = a$ este ordinar, atunci $a_n = 0$ pentru orice $n < 0$ şi reciproc.

Teorema 10.1.1. (Cauchy-Riemann). *În vecinătatea unui punct singular izolat, o ramură uniformă f a unei funcţii analitice nu poate fi mărginită.*

Să presupunem că există un $M > 0$ şi un disc $\Delta(a, R_0)$ astfel ca:

$$x \in \Delta(a, R_0) \Rightarrow |f(z)| < M.$$

Atunci pentru orice $R < R_0$ avem $|f(z)| < M$, pentru $|z - a| = R$.

Luând raza cercului C egală cu R, deducem:

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} M \frac{2\pi R}{R^{n+1}} + \frac{M}{R^n}.$$

Făcând $R \to 0$, deducem $a_n = 0$ pentru $n < 0$, ceea ce arată că punctul $z = a$ este ordinar, contrar ipotezei.

Deci dacă ramura uniformă f este mărginită în vecinătatea lui a, atunci a este ordinar. Invers, dacă $z = a$ este ordinar pentru f, atunci f este mărginită în vecinătatea lui a şi avem evident $f(z) \to f(a)$ pentru $z \to a$, $f(a) \neq \infty$.

O consecinţă imediată, a teoremei lui Cauclhy-Riemarm este următoarea:

Dacă $z = a$ este un punct singular izolat pentru ramura uniformă f, atunci există un şir $(z_n) \subset G$, $z_n \to a$ astfel încât $f(z_n) \to \infty$. Deci putem avea următoarele două cazuri:

a) există limita $\lim\limits_{z \to a} f(z) = \infty$;

b) nu există limita de mai sus.

În primul caz suntem îndreptăţiţi să atribuim funcţiei f valoarea ∞ în punctul a, deci $f(a) = \infty$. În acest caz, punctul singular izolat a se numeşte pol.

În cazul al doilea nu putem atribui nici o valoare funcţiei f în punctul a. În acest caz, punctul singular izolat se numeşte punct singular esenţial izolat.

Să presupunem că $z = a$ este un pol pentru ramura uniformă f.

Să arătăm, în primul rând, că în acest caz punctul a este un zero pentru funcţia $g = \frac{1}{f}$. Întradevăr a fiind un pol pentru f, există o vecinătate $V(a)$ aşa ca $V^-(a)$, f să fie olomorfă şi $|f(z)| > 1$ pentru $z \in V(a)$. Funcţia g va fi evident olomorfă în $V^-(a)$. Dar $|g(z)| < 1$ pentru $z \in V(a)$ şi conform teoremei lui Cauchy-Riemann, punctul $z = a$ va fi ordinar pentru g. Deoarece $g(z) \to 0$ pentru $z \to a$, $g(a) = 0$, adică a este un zero pentru $\frac{1}{f}$.

Invers, dacă $z = a$ este un zero pentru g, atunci el va fi un pol pentru $\frac{1}{g} = f$. Întradevăr, în acest caz avem în vecinătatea lui a, $g(z) = (z-a)^p \varphi(z)$, $\varphi(z) \neq 0$, φ olomorfă în a, deci $f(z) = \frac{1}{g(z)} = \frac{\psi(z)}{(z-a)^p}$, $\psi(a) \neq 0$, ψ olomorfă în a.

De aici rezultă $f(z) \to \infty$, când $z \to a$. Deci un pol poate fi caracterizat prin următoarea proprietate: *Pentru ca punctul a să fie un pol pentru ramura uniformă f este necesar şi suficient ca el să fie un zero pentru funcţia $\frac{1}{f}$.*

Putem acum introduce noţiunea de ordin de multiplicitate al unui pol. Anume, vom spune că a este un pol de ordinul p al funcţiei f, dacă el este un zero de ordinul p al funcţiei $\frac{1}{f}$.

Dacă a este un pol de ordinul p al funcţiei f, atunci în vecinătatea redusă a lui a funcţia f va avea, reprezentarea:

$$f(z) = \frac{\psi(z)}{(z-a)^p},\ \psi(a) \neq 0$$

ψ fiind olomorfă în vecinătatea lui a şi invers, dacă funcţia va avea reprezentarea locală de mai sus, atunci a va fi un pol de ordinul p.

Să vedem care este structura dezvoltării Laurent în vecinătatea unui pol de ordinul p. Scriind:

$$\psi(z) = \psi(a) + \frac{z-a}{1!}\psi'(a) + ... + \frac{(z-a)^n}{n!}\psi^{(n)}(a) + ...$$

obţinem pentru f dezvoltarea:

$$f(z) = \frac{A_{-p}}{(z-a)^p} + ... + \frac{A_{-1}}{z-a} + A_0 + A_1(z-a) + ...$$

unde $A_{-p} \neq 0$.

Se vede că, în acest caz, partea principală a dezvoltării Laurent a funcţiei f conţine un număr finit de termeni, iar coeficientul lui $(z-a)^{-p}$ este diferit de zero.

Această proprietate caracterizează polii, adică, reciproc, dacă în vecinătatea unui punct singular izolat ramura uniformă f are dezvoltarea de mai sus, atunci punctul a este un pol de ordinul p pentru f. Întradevăr, în acest caz avem: $(z-a)^p f(z) = A_{-p} + A_{-p+1}(z-a) + ... = \psi(z)$ deci

$$f(z) = \frac{\psi(z)}{(z-a)^p},\ \psi(a) \neq 0,$$

ψ olomorfă în a.

Fie a un punct singular esenţial izolat pentru ramura uniformă f. Atunci dezvoltarea Laurent în vecinătatea lui a va avea partea principală formată în mod necesar dintr-o infinitate de termeni, adică va exista un şir infinit de numere naturale (μ_m) aşa ca $A_{-\mu_m} \neq 0$.

Această proprietate va caracteriza punctele singulare esenţiale izolate.

Dacă punctul a este singular esenţial izolat pentru f, se pune problema ce va fi el pentru funcţia $g = \frac{1}{f}$. În primul rând, să observăm că el nu poate fi ordinar, deoarece, dacă ar fi ordinar pentru g şi $g(a) = 0$, atunci a ar fi pol pentru f. La fel se constată că nu poate fi pol pentru g deoarece ar fi ordinar pentru f. Rămân următoarele două posibilităţi:

1)dacă a nu este punct de acumulare de zerouri pentru f, atunci el va fi singular esenţial izolat pentru $\frac{1}{f}$;

2)dacă a este punct de acumulare de zerouri pentru f, atunci el va fi un punct de acumulare de poli; în acest caz, el nu va mai fi un punct singular izolat; el va fi un punct singular esenţial neizolat şi anume punct de acumulare de poli. Va exista o vecinătate a punctului a astfel încât în $V^-(a)$ să nu existe alte singularităţi ale lui f decât poli.

Să observăm că teorema lui Cauchy-Riemann se păstrează şi în acest caz şi evident, consecinţa sa: dacă a este un punct de acumulare de poli pentru f, atunci există un şir $z_n \to a$, $f(z_n) = \infty$ adică $f(z_n) \to \infty$.

Un punct singular esenţial izolat a este caracterizat prin faptul că nu există limita funcţiei f în punctul a. Aceasta înseamnă că putem pune în evidenţă cel puţin două şiruri (z_n) şi z'_n, $z_n \to a$, $z'_n \to a$, astfel încât şirul $(f(z_n))$ şi $(f(z'_n))$ să aibă limite diferite. Se pune în mod natural problema de a vedea care sunt toate punctele limită posibile ale şirurilor $(f(z_n))$ cu $z_n \to a$.

Teorema 10.1.2. (Weierstrass-Sohoţki). *Dacă punctul a este singular esenţial izolat pentru ramura uniformă f a unei funcţii analitice, atunci oricare ar fi $A \in \tilde{\mathbb{C}}$ există un şir (z_n), $z_n \to a$ aşa ca $f(z_n) \to A$.*

Altfel spus într-un punct singular esenţial izolat, o ramură uniformă a unei funcţii analitice este complet nedeterminată.

Dacă $A = \infty$, teorema este evident adevărată. Fie $A \neq \infty$. Atunci $f - a$ admite de asemenea pe a ca punct singular esenţial izolat. Să considerăm funcţia $F = \frac{1}{f-a}$.

Punctul a va fi pentru F un punct singular esenţial, izolat sau punct limită de poli. Deci va exista un şir $z_n \to a$ astfel ca $F(z_n) \to \infty$, de unde rezultă $f(z_n) \to A$.

Teorema 10.1.3.(Picard). *Dacă a este singular esenţial izolat pentru funcţia analitică uniformă f, atunci în orice vecinătate a acestui punct funcţia f ia orice valoare finită afară poate de o singură valoare numită valoare excepţională.*

În cazul unui punct singular esenţial neizolar, desigur că nu mai poate fi vorba de dezvoltarea funcţiei în serie Laurent în vecinătatea unui punct.

Cel mai simplu tip de punct singular esenţial neizolat este punctul ele acumulare de poli în care caz teorema lui Weierstrass-Sohoţki se păstrează. Teorema lui Picard este valabilă cu două valori excepţionale în locul uneia din cazul punctului singular esenţial izolat.

Un alt caz de singularităţi neizolate este cel al liniilor singulare. Vom da ca exemplu cazul unei serii, element de funcţie analitică care admite cercul său de convergenţă ca linie singulară. Aceasta înseamnă că elementul nu se poate prelungi peste cercul de convergenţă şi deci funcţia analitică respectivă se reduce la acest unic element.

10.2 Funcţii analitice uniforme în planul complex

1. Funcţii întregi. Vom lua drept domeniu D în care considerăm o ramură uniformă f chiar planul $\mathbb{C}$. Evident că cele mai simple funcţii analitice uniforme vor fi acelea care nu au puncte singulare în $\mathbb{C}$. Acestea sunt funcţiile întregi.

Dacă f este o funcţie întreagă, ea va fi dată de dezvoltarea:

$$f(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n$$

care va converge în întreg planul $\mathbb{C}$, adică vom avea $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$. Deci o funcţie întreagă poate fi reprezentată de un singur element al său care e o serie întreagă convergentă în întreg planul $\mathbb{C}$.

Pentru a studia natura punctului de la infinit adică în cazul când planul $\mathbb{C}$ se înlocuieşte cu $\tilde{\mathbb{C}}$ pentru o funcţie întreagă, vom face schimbarea $\zeta = \frac{1}{z}$. În acest caz, avem:

$$\varphi(\zeta) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = a_0 + \frac{a_1}{\zeta} + ... + \frac{a_n}{\zeta^n} + ...$$

ceea ce arată că pentru φ punctul $\zeta = 0$ poate fi ordinar, dacă $a_n = 0$, $n = 1, 2, 3, ...$, pol, dacă $a_n = 0$, pentru $n \geq m$ sau punct singular esenţial izolat, după cum f este o constantă, un polinom de gradul m sau o funcţie transcendentă întreagă, adică dezvoltarea sa tayloriană are o infinitate de termeni.

Teorema 10.2.1. (Liouville). *Orice funcţie întreagă mărginită în întreg planul se reduce la o constantă.*

Fie f întreagă şi să presupunem că $z \in \mathbb{C} \Rightarrow |f(z)| \leq M$.

Fie cercul $C_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$ şi să punem:

$$M(r) = \max_{z\in C_r} |f(z)| .$$

Avem $r > 0 \Rightarrow M(r) < M$. Din formula:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_r} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz$$

deducem $|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}$ deci $|a_n| \leq \frac{M}{r^n}$.

Făcând $r \to \infty$, obţinem $a_n = 0$, $n = 1, 2, ...$, deci $f(z) = a_0$, oricare ar fi $z \in \mathbb{C}$.

Generalizare. Să presupunem că, pentru orice $r > 0$, are loc inegalitatea $M(r) < Mr^p$.

Atunci $|a_n| < \frac{M}{r^{n-p}}$ şi făcând $r \to \infty$ obţinem $a_n = 0$ pentru orice $n > p$. Deci, în acest caz f se reduce la un polinom de grad cel mult p.

Acest rezultat arată că dacă f este o funcţie întreagă, atunci $M(r)$ tinde la $+\infty$ mai repede decât orice putere a lui r.

2. Funcţii raţionale. Deoarece cele mai simple singularităţi sunt polii, ne putem pune problema de a caracteriza acele funcţii analitice uniforme care în $\mathbb{C}$ nu au alte singularităţi decât poli. Să observăm, în primul rând că aceştia sunt neapărat în număr finit, căci altfel ar avea un punct de acumulare care nu va putea fi punct ordinar sau pol.

De altfel, funcţiile cu proprietatea de mai sus sunt chiar funcţiile raţionale, după cum rezultă din următoarea teoremă:

Teoremă 10.2.2. *Condiţia necesară şi suficientă ca o funcţie analitică uniformă f să nu aibă în $\mathbb{C}$ alte singularităţi decât poli este ca ea să fie raţională.*

Să demonstrăm întâi suficienţa.

Fie $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ o funcţie raţională unde polinoamele P şi Q se presupun ireductibile. Fie

$$P(z) = \alpha_0 z^m + ... + \alpha_m, \;\; Q(z) = \beta_0 z^n + ... + \beta_n.$$

Dacă a este un zero de ordin p pentru Q, adică $Q(z) = (z-a)^p Q_1(z)$, $Q_1(a) \neq 0$ atunci avem în vecinătatea redusă a lui a:

$$f(z) = \frac{\psi(z)}{(z-a)^p}, \; \psi(a) \neq 0$$

deci a este un pol de ordin p pentru f.

Orice punct $z \in \mathbb{C}$, unde $Q(z) \neq 0$, este un punct ordinar pentru f, deoarece $\frac{1}{Q}$ va fi olomorfă într-o vecinătate a acestui punct, deci şi $\frac{P}{Q}$.

Pentru a studia natura punctului $z = \infty$, vom face schimbarea $z = \frac{1}{\zeta}$. Avem:

$$f\left(\frac{1}{\zeta}\right)=\frac{1}{\zeta^{m-n}}\frac{\alpha_0+...+\alpha_m\zeta^m}{\beta_0+...+\beta_n\zeta^n}=\varphi(\zeta),$$

ceea ce arată că pentru $m>n$, $\zeta=0$ pentru φ, deci $z=\infty$ pentru f este un pol de ordinul $m-n$; pentru $m\leq n$, $\zeta=0$ pentru φ, deci $z=\infty$, pentru f este un punct ordinar, el este chiar zero de ordin $n-m$, dacă, $n>m$.

Rezultă că o funcţie raţională nu poate avea în $\mathbb{C}$ ca singularităţi decât poli, în număr finit.

Pentru a demonstra necesitatea condiţiei, să presupunem că f are în $\mathbb{C}$ ca singularităţi numai poli (în număr finit). Făcând schimbarea $\zeta=\frac{1}{z-a}$, unde a e un punct ordinar, putem reveni totdeauna la cazul când punctul ∞ este ordinar. Fie deci $a_1,...,a_l$ polii lui f situaţi în $\mathbb{C}$.

Notând cu $R_k(z)$ partea principală a dezvoltării Laurent a lui f în jurul lui a_k, vom considera funcţia:

$$g(z)=f(z)-\sum_{k=1}^{n}R_k(z)$$

care evident că nu va mai avea nici o singularitate în $\mathbb{C}$, deci va fi întreagă. Pe de altă parte, punctul ∞ este ordinar întrucât orice R_k nu are altă singularitate în $\mathbb{C}$ decât a_k. Rezultă că g este o constantă, deci f o funcţie raţională.

3.Funcţii meromorfe. Numim funcţie meromorfă orice funcţie analitică uniformă care în planul $\mathbb{C}$ nu are alte singularităţi decât poli. Desigur că funcţiile întregi, pe de o parte, şi funcţiile raţionale, pe de altă parte, sunt cazuri particulare de funcţii meromorfe. Punctul ∞ pentru o funcţie meromorfă poate fi ordinar, pol sau esenţial, izolat sau punct de acumulare de poli.

Deoarece polii sunt puncte singulare izolate, rezultă că o funcţie meromorfă nu poate avea în $\mathbb{C}$ decât cel mult o infinitate numărabilă de poli care se vor acumula în mod necesar la infinit.

4.Funcţie meromorfă într-un domeniu este o ramură analitică uniformă corespunzătoare acestui domeniu, care admite ca singularităţi în acest domeniu numai poli. Aceştia pot fi si un număr finit sau o infinitate numărabilă, dar în acest din urmă caz ei se acumulează în mod necesar pe frontiera domeniului.

Capitolul 11

Teorema generală a lui Cauchy şi aplicaţii

11.1 Indexul unui drum

În acest capitol ne referim doar la drumuri parţial netede, adică funcţii continue $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ pentru care există o diviziune $\Delta = \{\alpha = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = \beta\}$ a intervalului $[\alpha, \beta]$ astfel încât $\gamma|[x_{k-1}, x_k]$ este drum neted, pentru $k = 1, 2, \ldots, n$. Vom nota $S(\gamma) = \gamma|[\alpha, \beta]$ suportul unui asemenea drum γ, iar lungimea lui γ este în acest caz numărul

$$L(\gamma) = \int_\alpha^\beta |\gamma'(t)|dt.$$

De asemenea, dacă $f : S(\gamma) \to \mathbb{C}$ este o funcţie continuă atunci

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\, \gamma'(t)dt.$$

Fie γ un drum închis parţial neted şi $a \in \mathbb{C}$, $a \notin S(\gamma)$. Vom nota prin $I(\gamma, a)$ valoarea integralei

$$I(\gamma, a) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - a}. \tag{11.1}$$

Propoziţia 11.1.1. *Pentru orice drum închis parţial neted γ şi $a \in \mathbb{C} \backslash S(\gamma)$, $I(\gamma, a)$ este un număr întreg.*

Demonstraţie. Presupunem $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ şi fie $\alpha = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = \beta$ astfel că $\gamma_k = \gamma|[x_{k-1}, x_k]$ este un drum neted, $k = 1, \ldots, n$. Considerăm $a \in \mathbb{C} \setminus S(\gamma)$ şi funcţiile $f_k : [x_{k-1}, x_k] \to \mathbb{C}$ definite prin

$$f_k(t) = \int\limits_{x_{k-1}}^{t} \frac{\gamma_k'(s)}{\gamma_k(s) - a} ds \quad (x_{k-1}) \le t \le x_k; 1 \le k \le n.$$

Atunci $f_k(x_{k-1}) = 0$, $f_k(x_k) = \int\limits_{\gamma_k} \frac{dz}{z-a}$ şi

$$f_k'(t) = \frac{\gamma_k'(t)}{\gamma_k(t) - a} \quad (x_{k-1} \le t \le x_k).$$

Folosind această ultimă relaţie obţinem

$$\frac{d}{dt}\left[e^{-f_k}(\gamma_k - a)\right] = e^{-f_k}\gamma_k' - f_k' \cdot e^{-f_k}(\gamma_k - a) = 0$$

adică $e^{-f_k}(\gamma_k - a)$ este funcţie constantă pe $[x_{k-1}, x_k]$. Prin urmare

$$e^{-f_k(x_{k-1})}(\gamma(x_{k-1}) - a) = \gamma(x_{k-1}) - a = e^{-f_k(x_k)}(\gamma(x_k) - a)$$

pentru orice $k = 1, 2, \ldots, n$. De aici rezultă succesiv

$$\begin{aligned} \gamma(\alpha) &= e^{-f_1(x_1)}(\gamma(x_1) - a) = e^{-f_1(x_1)} \cdot e^{-f_2(x_2)}(\gamma(x_2) - a) \\ &= \ldots = e^{-f_1(x_1) - f_2(x_2) - \ldots - f_n(x_n)}(\gamma(x_n) - a) \\ &= (\gamma(\alpha) - a) \cdot exp\left(-\sum_{k=1}^{n} f_k(x_k)\right), \end{aligned}$$

întrucât $\gamma(x_n) = \gamma(\beta) = \gamma(\alpha)$. Rezultă $exp\left(-\sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x_k)\right) = 1$, şi deducem că

$$\int\limits_{\gamma} \frac{dz}{z - a} = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\gamma_k} \frac{dz}{z - a} = \sum_{k=1}^{n} f_k(x_k) = 2m\pi i,$$

pentru un anumit număr întreg m.

Numărul $I(\gamma, a)$ are şi o semnificaţie geometrică la care ne referim în continuare. Întâi reamintim câteva fapte privind funcţia argument.

Pentru orice $z \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ există $\theta \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\cos\theta = \frac{\text{Re } z}{|z|}, \quad \sin\theta = \frac{\text{Im } z}{|z|}. \tag{11.2}$$

Notăm $Arg\ z := \{\theta \in \mathbb{R} : \theta\text{-verifică (11.2)}\}$ şi orice element al mulţimii $Arg\ z$ se numeşte *argument* al lui z. Din (11.2) rezultă că orice două elemente ale lui $Arg\ z$ diferă printr-un multiplu întreg de 2π.

Aplicaţia $Arg\ :\ \mathbb{C}^* \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ de variabilă complexă cu valori submulţimi de numere reale dată de corespondenţa $z \longmapsto Arg\ \ z$, se numeşte *funcţia argument.* Aceasta poate fi considerată ca o funcţie multivocă (multiformă), iar valorile ei se descriu astfel:

$$Arg\ \ z = A_z \cap B_z$$

unde

$$A_z = \left\{ \pm \arccos \frac{\operatorname{Re} z}{|z|} + 2n\pi : n \in \mathbb{Z} \right\},$$

$$B_z = \left\{ (-1)^k \arcsin \frac{\operatorname{Im} z}{|z|} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Observaţie. Pentru orice $z \in \mathbb{C}^*$ mulţimea $Arg\ z \cap (-\pi, \pi]$ este unipunctuală. Întradevăr, deoarece $\arccos \frac{Re\ z}{|z|} \in [0, \pi]$, avem

$$-\pi < \pm \arccos \frac{\operatorname{Re} z}{|z|} + 2n\pi \leq \pi$$

dacă şi numai dacă $n = 0$, de unde rezultă că

$$A_z \cap (-\pi, \pi] = \left\{ \pm \arccos \frac{\operatorname{Re} z}{|z|} \right\}.$$

Pe de altă parte, cum $\arcsin \frac{Im\ z}{|z|} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ avem

$$B_z \cap (-\pi, \pi] = \left\{ \arcsin \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}, \pi - \arcsin \frac{\operatorname{Im} z}{|z|},\ \text{sau}\ -\pi - \arcsin \frac{\operatorname{Im} z}{|z|} \right\}.$$

Deoarece $A_z \cap (-\pi, \pi]$ conţine două valori, una pozitivă şi una negativă, iar $B_z \cap (-\pi, \pi]$ conţine două pozitive (dacă $\operatorname{Im} z > 0$), ori două negative (dacă $\operatorname{Im} z < 0$), avem că $A_z \cap B_z \cap (-\pi, \pi]$ are cel mult un element. Putem avea:

$$\arccos \frac{\operatorname{Re} z}{|z|} = \begin{cases} \arcsin \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}, & \operatorname{Re} z \geqq 0,\ \operatorname{Im} z > 0 \\ \pi - \arcsin \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}, & \operatorname{Re} z < 0,\ \operatorname{Im} z \geqq 0 \end{cases},$$

sau

$$-\arccos \frac{\operatorname{Re} z}{|z|} = \begin{cases} \arcsin \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}, & \operatorname{Re} z > 0,\ \operatorname{Im} z \leqq 0 \\ -\pi - \arcsin \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}, & \operatorname{Re} z \leqq 0,\ \operatorname{Im} z < 0 \end{cases}.$$

Rezultă că intersecţia $Arg\ z \cap (-\pi, \pi]$ constă dintr-un singur punct notat $arg\ z$ şi care se numeşte *argumentul principal* al lui z. Din cele de mai sus urmează că

$$arg\ z = \begin{cases} \arccos \frac{\mathrm{Re}\, z}{|z|}, & \mathrm{Im}\, z > 0 \\ -\arccos \frac{\mathrm{Re}\, z}{|z|}, & \mathrm{Im}\, z < 0 \\ \arcsin \frac{\mathrm{Im}\, z}{|z|}, & \mathrm{Re}\, z > 0 \end{cases}$$

şi

$$arg\ z = \begin{cases} \pi - \arcsin \frac{\mathrm{Im}\, z}{|z|}, & \mathrm{Re}\, z < 0,\ \mathrm{Im}\, z \geqq 0 \\ -\pi - \arcsin \frac{\mathrm{Im}\, z}{|z|}, & \mathrm{Re}\, z \leqq 0,\ \mathrm{Im}\, z < 0 \end{cases}.$$

Deducem astfel că funcţia $arg : \mathbb{C}^* \ni z \longmapsto arg\ z \in (-\pi, \pi]$ este continuă pe $\mathbb{C}$ cu excepţia semiaxei reale negative şi în continuare notăm

$$arg_0 := arg|\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leqq 0\}.$$

Să menţionăm că dacă considerăm argumentul lui z din $[0, 2\pi)$ în locul lui $arg\ z$, atunci aplicaţia corespunzătoare este continuă pe $\mathbb{C}$ exceptând semiaxa reală pozitivă.

Acum putem arăta

Teorema 11.1.2. *Fie $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ un drum. Atunci există o funcţie continuă $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, astfel că pentru orice t, $f(t)$ este un argument al lui $\gamma(t)$. Orice două astfel de funcţii diferă printr-un multiplu întreg de 2π. Dacă $t_0 \in [\alpha, \beta]$ şi $\theta \in Arg\ \gamma(t_0)$, atunci există o unică funcţie f_0 (ca mai sus) cu $f_0(t_0) = \theta$.*

Demonstraţie. Presupunem întâi că drumul γ este definit pe $[0, 1]$. Fie $\varepsilon = \inf \{|\gamma(t)| : t \in [0, 1]\}$. Cum $\gamma(t) \neq 0$ pentru orice t şi $[0, 1]$ este compact, rezultă $\varepsilon > 0$. Apoi, deoarece γ este uniform continuă pe $[0, 1]$, există n natural aşa încât pentru $t, s \in [0, 1]$ cu $|t - s| < 1/n$ să avem $|\gamma(t) - \gamma(s)| < \varepsilon$. Împărţind în ultima inegalitate cu $|\gamma(s)| \neq 0$, obţinem $|\gamma(t)\gamma(s)^{-1} - 1| < 1$, de unde rezultă că $\gamma(t)\gamma(s)^{-1}$ nu este un număr real negativ şi deci el aparţine domeniului funcţiei continue arg_0.

Fie $\xi \in Arg\ \gamma(0)$. Definim funcţia h_1 :

$$h_1(t) = \xi + arg_0 \left(\gamma(t)\gamma(0)^{-1}\right), \quad t \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$$

şi definim funcţiile $h_2, h_3, \ldots, h_n$ recursiv prin

$$h_{k+1}(t) = h_k\left(\frac{k}{n}\right) + arg_0\left(\gamma(t)\gamma\left(\frac{k}{n}\right)^{-1}\right), \quad t \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right].$$

Toate funcţiile $h_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$ sunt continue şi deoarece $h_{k+1}(k/n) = h_k(k/n)$ pentru orice k, putem defini funcţia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ astfel că

$$f(t) = h_k(t), \text{ pentru } t \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right], \; k = 1, 2, \ldots, n.$$

Evident, f este o funcţie continuă. De asemenea se poate verifica prin inducţie asupra lui k că $h_k(t)$ este un argument al lui $\gamma(t)$ pentru $(k-1)/n \leqq t \leqq k/n$ şi atunci rezultă că $f(t)$ este un argument al lui $\gamma(t)$ pentru orice $t \in [0, 1]$. Observăm că dacă punem $f_m = f + 2m\pi$ pentru $m \in \mathbb{Z}$, atunci funcţiile f_m au aceleaşi proprietăţi ca şi f. Deci partea de existenţă este dovedită pentru cazul când drumul γ este definit pe $[0, 1]$.

În general, dacă $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}^*$ şi dacă $u : [0, 1] \to [\alpha, \beta]$ este un homeomorfism crescător, atunci $\gamma_1 = \gamma_0 \circ u$ este un drum în $\mathbb{C}^*$. Conform celor arătate mai sus, există o funcţie continuă $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ astfel că $g(t) \in Arg\ \gamma_1(t)$ pentru orice t. Atunci funcţia $f = g \circ u^{-1}$ verifică, relativ la γ, proprietăţile cerute.

Acum presupunem că f' şi f' sunt funcţii continue pe $[\alpha, \beta]$ şi că $f'(t)$, $f'(t) \in arg\ \gamma(t)$ pentru $t \in [\alpha, \beta]$. Atunci pentru $t \in [\alpha, \beta]$ există $q(t) \in \mathbb{Z}$ astfel că $f'(t) = f'(t) + 2\pi q(t)$. Prin urmare q defineşte o funcţie continuă de la $[\alpha, \beta]$ în $\mathbb{Z}$ şi deoarece $[\alpha, \beta]$ este conex, rezultă q constantă. Deci funcţiile f' şi f' diferă printr-un multiplu întreg de 2π.

Fie $t_0 \in [\alpha, \beta]$ şi $\theta \in Arg\ \gamma(t_0)$. Definim funcţia

$$f_0(t) = \theta - f(t_0) + f(t), \quad t \in [\alpha, \beta]$$

unde f este funcţia construită mai sus. Atunci $f_0(t_0) = \theta$ şi deoarece $\theta - f(t_0)$ este multiplu întreg de 2π, $f_0(t)$ este un argument al lui $\gamma(t)$ pentru orice t. Evident, dacă f_* este o altă funcţie cu aceleaşi proprietăţi ca f_0, va exista $p \in \mathbb{Z}$ încât $f_0(t) = f_*(t) + 2p\pi$ pentru orice t. Luând $t = t_0$, rezultă $p = 0$ şi deci $f_* = f_0$. Demonstraţia se încheie.

Notăm că teorema nu afirmă că argumentul poate fi ales continuu pe suportul unui drum. Dacă drumul γ are puncte de întoarcere (nu este injectiv, adică există $t_1 \neq t_2$ cu $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$), putem avea $f(t_1) \neq f(t_2)$.

Dacă $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}^*$ este un drum şi $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă ca în teorema precedentă, atunci numărul $f(\beta) - f(\alpha)$ este independent de funcţia f şi deci depinde numai de drumul γ. Acest număr se numeşte *varianta argumentului relativ la drumul* γ.

Dacă drumul γ este închis, atunci există $n \in \mathbb{Z}$ astfel ca $f(\beta) - f(\alpha) = 2n\pi$. în acest caz n se numeşte *indexul lui* γ *relativ la* punctul 0.

Dacă γ este un drum în $\mathbb{C} \setminus \{a\}$, $a \in \mathbb{C}$ atunci se defineşte *indexul lui* γ *relativ la* a, ca fiind indexul lui $\gamma - a$ relativ la 0 şi îl vom nota $n(\gamma, a)$.

Prin urmare $n(\gamma, a)$ este un număr întreg definit prin

$$n(\gamma, a) := \frac{1}{2\pi} \left[f(\beta) - f(\alpha) \right],$$

unde f este una din funcţiile continue pe $[\alpha, \beta]$ (asigurată prin teorema 11.1.2) care satisface $f(t) \in Arg\left[\gamma(t) - a\right],\ t \in [\alpha, \beta]$. Datorită acestui fapt, $n(\gamma, a)$ are o semnificaţie geometrică, dar şi o semnificaţie analitică dată de

Propoziţia 11.1.3. *Pentru orice drum închis parţial neted* γ, *are loc*

$$n(\gamma, a) = I(\gamma, a) \quad (a \in \mathbb{C} \setminus S(\gamma)).$$

Demonstraţie. Deoarece $I(\gamma, a) \in \mathbb{Z}$, avem

$$\begin{aligned} I(\gamma, a) &= \mathrm{Re}\, \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{dz}{z - a} = \frac{1}{2\pi} \mathrm{Re} \left(\frac{1}{i} \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - a} ds \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[f(\beta) - f(\alpha) \right], \end{aligned}$$

unde

$$f(t) := arg_0 \left[\gamma(\alpha) - a\right] + \mathrm{Re} \left(\frac{1}{i} \int\limits_{\alpha}^{t} \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - a} \right) \tag{11.3}$$

este, evident continuă pe $[\alpha, \beta]$. Pentru încheierea demonstraţiei rămâne deci să probăm că

$$f(t) \in Arg\ \left[\gamma(t) - a\right], \quad t \in [\alpha, \beta]. \tag{11.4}$$

Notăm întâi cu $\delta(\varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$ modulul de continuitate uniformă pe $[\alpha, \beta]$ a lui γ. Cum $S(\gamma)$ este compact şi $a \notin S(\gamma)$ avem că $\rho := dist(a, S(\gamma)) > 0$. Alegem $n \in \mathbb{N}$ cu

$$\frac{1}{n} < \delta(\rho) \tag{11.5}$$

şi partiţia: $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_{k-1} < t_k < \ldots < t_n = \beta$ a lui $[\alpha, \beta]$ cu $t_k = \alpha + \frac{\beta - \alpha}{n} k$, $(k = 0, 1, \ldots, n)$. Vom demonstra prin inducţie asupra lui k că (11.4) are loc pe fiecare interval $[t_{k-1}, t_k]$. Pentru $k = 1$ şi t fixat în $[t_0, t_1]$ avem

$$f(t) = arg_0 \left[\gamma(\alpha) - a\right] + Re \left(\frac{1}{i} \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{{\varphi_0}'(s)}{\varphi_0(s)} ds \right)$$

unde am pus

$$\varphi_0(s) := [\gamma(s) - a] \, [\gamma(\alpha) - a]^{-1} \,, \quad s \in [t_0, t_1] \,.$$

Deoarece pentru $s \in [t_0, t_1]$ are loc $s - t_0 < 1/n$ aplicând (11.5) obţinem

$$|\varphi_0(s) - 1| = |\gamma(s) - \gamma(\alpha)| \, |\gamma(\alpha) - a|^{-1} \; < \rho|\gamma(\alpha) - a|^{-1} \leq 1,$$

ceea ce arată că $\{\varphi_0(s), \; s \in [t_0, t_1]\}$ este conţinută strict în semiplanul drept, unde determinarea principală a funcţiei logaritm este continuă şi $\mathbb{C}-$derivabilă. Rezultă atunci

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{{\varphi_0}'(s)}{\varphi_0(s)} ds = \log \frac{\varphi_0(t)}{\varphi_0(\alpha)} = \log |\varphi_0(t)| + \; i \; arg_0 \; \varphi_0(t)$$

şi prin urmare

$$f(t) = arg_0 \; [\gamma(\alpha) - a] + arg_0 \left[\frac{\gamma(t) - a}{\gamma(\alpha) - a} \right] \in \; Arg \, [\gamma(t) - a] \,.$$

Presupunem acum că $t \in [t_{k-1}, t_k]$ implică $f(t) \in \; Arg \, [\gamma(t) - a]$. Fixând $t \in [t_k, t_{k+1}]$ şi descompunând corespunzător integrala din (11.3) avem succesiv

$$\begin{aligned} f(t) &= f(t_k) + \operatorname{Re} \left(\frac{1}{i} \int\limits_{t_k}^{t} \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - a} ds \right) \\ &= f(t_k) + \operatorname{Re} \left(\frac{1}{i} \int\limits_{t_k}^{t} \frac{\varphi_k'(s)}{\varphi_k(s)} ds \right), \end{aligned}$$

unde am pus

$$\varphi_k(s) := [\gamma(s) - a] \;\; [\gamma(t_k) - a]^{-1} \, ; \quad (s \in [t_k, t_{k+1}]) \,.$$

Exact ca la pasul zero (cu φ_k în loc de φ_0) rezultă

$$\int\limits_{t_k}^{t} \frac{\varphi' k(s)}{\varphi_k(s)} ds = \log |\varphi_k(t)| + \; i \; arg_0 \; \varphi_k(t),$$

de unde aplicând ipoteza de inducţie în t_k obţinem

$$f(t) = f(t_k) + \; arg_0 \left[\frac{\gamma(t) - a}{\gamma(t_k) - a} \right] \in Arg \, [\gamma(t) - a] \,.$$

Această propoziţie permite să interpretăm indexul $n(\gamma, a)$ ca fiind integrala (11.1). Astfel se obţine imediat

Propoziţia 11.1.4.*Fie γ şi τ două drumuri închise şi parţial netede, având acelaşi punct iniţial. Atunci*

i) $n(\gamma, a) = -n(\gamma^{-1}, a)$ pentru orice $a \notin S(\gamma)$;

ii) $n(\gamma \cdot \tau, a) = n(\gamma, a) + n(\tau, a)$ pentru orice $a \notin S(\gamma) \cup S(\tau)$.

Pentru γ ca mai sus, suportul să $S(\gamma)$ este o mulţime compactă şi deci $\Omega\gamma := \mathbb{C} \setminus S(\gamma)$ este o mulţime deschisă, pentru care există $R > 0$ astfel încât $\{z \in \mathbb{C} : \; |z| > R\} \subset \Omega\gamma$. ($R$ astfel ales ca $S(\gamma) \subset \overline{D}(0, R)$ Rezultă că există o componentă conexă G_0 a lui $\Omega\gamma$ care conţine mulţimea conexă $\{|z| > R\}$, deci G_0 este nemărginită, iar celelalte componente conexe ale lui $\Omega\gamma$, fiind disjuncte de $\{|z| > R\}$, vor fi conţinute în $\overline{D}(0, R)$, deci sunt mărginite.

În acest context are loc următoarea teoremă a indexului.

Teorema 11.1.5.*Fie γ un drum închis parţial neted în $\mathbb{C}$. Atunci aplicaţia index $a \longmapsto n(\gamma, a)$ este constantă pe fiecare componentă conexă a mulţimii $\Omega\gamma$ şi $n(\gamma, a) = 0$ pentru a în componenta conexă nemărginită a lui $\Omega\gamma$.*

Demonstraţie. Definim funcţia $f : \Omega\gamma \to \mathbb{C}$ prin $f(a) = n(\gamma, a)$ şi arătăm că f este continuă pe $\Omega\gamma$. Fie $a \in \Omega\gamma$, $r = \inf\{|a - z| \;\; : \;\; z \in S(\gamma)\}$ şi $w \in D(a, \delta) \cap \Omega\gamma$, unde $0 < \delta < r/2$.

Atunci $|z - w| \geq |z - a| - |w - a| > r - \delta > r/2$ şi obţinem

$$|f(w) - f(a)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{\gamma}\left(\frac{1}{z-w} - \frac{1}{z-a}\right)dz\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{\gamma}\frac{(w-a)}{(z-a)(z-w)}dz\right|$$

$$\leqq \frac{|w-a|}{2\pi} \cdot \frac{2}{r} \cdot \frac{1}{r} \cdot L(\gamma) < \frac{\delta}{\pi r^2} L(\gamma).$$

Deci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$, $\delta < \min\{r/2, \; \pi r^2 \varepsilon / L(\gamma)\}$, astfel că dacă $w \in \Omega\gamma$ şi $|w - a| < \delta$ avem $|f(w) - f(a)| < \varepsilon$, adică f este continuă în punctul a. Cum a este arbitrar, f este continuă pe $\Omega\gamma$.

Acum fiecare componentă conexă G a lui $\Omega\gamma$ este mulţime conexă şi cum f este continuă pe G, urmează că $f(G)$ este mulţime conexă. Dar cum $f(G)$ este conţinută în mulţimea întregilor, rezultă că $f(G)$ este mulţime unipunctuală, ceea ce înseamnă că f este constantă pe G. Mai mult, dacă G_0 este componenta conexă nemărginită a lui $\Omega\gamma$, există $R > 0$ astfel că $\{z \in \mathbb{C} : \; |z| > R\} \subset G_0$. Cum $S(\gamma)$ este mărginită, există $\rho > 0$ astfel că $|z| \leqq \rho$ pentru orice $z \in S(\gamma)$. De fapt, putem alege $R > 0$ ca mai sus, cu $R - \rho > L(\gamma)/2\pi$. Fie $a \in G_0$ cu

$|a| > R$. Atunci pentru orice $z \in S(\gamma)$ avem

$$|z-a| > |a| - |z| > R - \rho > L(\gamma)/2\pi$$

şi obţinem

$$|n(\gamma, a)| < \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{L(\gamma)} \cdot L(\gamma) = 1.$$

Rezultă că $n(\gamma, a) = 0$ deoarece funcţia f este constantă pe G_0 şi ia valori întregi.

Ca aplicaţie a teoremei de mai sus putem arăta acum

Propoziţia 11.1.6. *Fie Ω un domeniu în $\mathbb{C}$ şi fie a şi b în aceeaşi componentă conexă a lui $\mathbb{C} \setminus \Omega$. Atunci există o funcţie $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ astfel că*

$$e^{f(z)} = \frac{z-a}{z-b} \quad (z \in \Omega).$$

Demonstraţie. Considerăm funcţia $g : \Omega \to \mathbb{C}$ definită prin

$$g(z) = \frac{z-a}{z-b} \quad (z \in \Omega).$$

Evident, $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ şi de asemenea $g'/g \in \mathcal{H}(\Omega)$. Arătăm că g'/g este primitivabilă pe Ω. Pentru aceasta, fie γ un drum închis parţial neted în Ω. Atunci avem

$$\int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)} dz = \int_\gamma \frac{a-b}{(z-a)(z-b)} dz = \int_\gamma \left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b} \right) dz$$
$$= 2\pi i (n(\gamma, a) - n(\gamma, b)).$$

Deoarece punctele a şi b sunt într-o componentă conexă a lui $\mathbb{C} \setminus \Omega$, ele sunt în aceeaşi componentă conexă a lui $\Omega\gamma$ şi cu teorema 11.1.5 avem $n(\gamma, a) = n(\gamma, b)$. Deci $\int_\gamma g'/g = 0$ şi atunci rezultă că g'/g este o primitivă h pe Ω. Dar

$$(e^{-h} \cdot g)' = e^{-h} \cdot g' - e^{-h} \cdot h' \cdot g = e^{-h}(g' - h'g) = 0,$$

deoarece $h' = g'/g$ pe Ω. Rezultă că există $\lambda \in \mathbb{C}^*$ astfel că $e^{-h} g = \lambda$, sau $g = \lambda e^h$ pe Ω. Atunci există $c \in \mathbb{C}$ cu $e^c = \lambda$ şi prin urmare $g = e^f$, unde $f = h + c \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Notăm că dacă n este un număr întreg, $a \in \mathbb{C}$ şi $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ este drumul definit prin $\gamma(t) = a + exp(2n\pi t i)$, atunci cu teorema 11.1.5 obţinem că $n(\gamma, a) = n$ pentru orice $b \in D(a, 1)$ şi $n(\gamma, b) = 0$, dacă $|b - a| > 1$. astfel, în acest caz avem o interpretare intuitivă a indexului $n(\gamma, b)$.

În afară de teorema 11.1.5 care dă o condiţie sificientă pentru ca indexul unui drum relativ la un punct sa fie 0, prezentăm acum un criteriu pentru ca indexul să fie 1, aceste fapte fiind importante în aplicaţii.

Propoziţia 11.1.7. *Fie* $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ *un drum închis, parţial neted în* $\mathbb{C}$ *şi fie* $a = \alpha + i\beta \in \mathbb{C} \setminus S(\gamma)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. *Fie* $0 \leqq t_1 < t_2 < 1$ *şi drumurile* $\gamma_1 = \gamma|[t_1, t_2]$, $\gamma_2 = (\gamma|[t_2, 2]) \cdot (\gamma|[0, t_1])$. *Presupunem că* $\mathrm{Im}\gamma(t_1) > \beta$, $\mathrm{Im}\gamma(t_2) < \beta$ *şi* $S(\gamma_1) \cap A^+ = S(\gamma_2) \cap A^- = \emptyset$ *unde*

$$A^+ = \{z \in \mathbb{C} : \ \mathrm{Re}z \geqq \alpha, \ \mathrm{Im}z = \beta\}, \ \ A^- = \{z \in \mathbb{C} : \ \mathrm{Re}z \leqq \alpha, \ \mathrm{Im}z = \beta\}.$$

Atunci $n(\gamma, a) = 1$.

Demonstraţie. Fără a reduce din generalitate putem presupune că $a = 0$. Punem $\gamma(t_1) = \rho_1 \cdot e^{i\theta_1}$ cu $\rho_1 > 0$, $0 < \theta_1 < \pi$ şi $\gamma(t_2) = \rho_2 \cdot e^{i\theta_2}$ cu $\rho_2 > 0$, $\pi < \theta_2 < 2\pi$. Pentru $\varepsilon > 0$ suficient de mic, fie $w_1 = \varepsilon e^{i\theta_1}$ şi $w_2 = \varepsilon e^{i\theta_2}$. Considerăm de asemenea drumurile liniare $L_1 = \overline{\gamma(t_1) \cdot w_1}$, $L_2 = \overline{w_2 \cdot \gamma(t_2)}$ şi drumurile $C_1(\theta) = \varepsilon e^{i\theta}$ pentru $\theta \in [\theta_2, \theta_1 + 2\pi]$ şi $C_2(\theta) = \varepsilon e^{i\theta}$ pentru $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$. Atunci drumurile

$$\Gamma_1 = \gamma_1 \cdot L_2^{-1} \cdot C_2^{-1} \cdot L_1^{-1} \ \text{şi} \ \Gamma_2 = \gamma_2 \cdot L_1 \cdot C_1^{-1} \cdot L_2$$

sunt drumuri închise şi parţial netede în $\mathbb{C}^*$ şi avem

$$\int\limits_{\Gamma_1} \frac{dz}{z} + \int\limits_{\Gamma_2} \frac{dz}{z} = \int\limits_{\gamma_1 \cdot \gamma_2} \frac{dz}{z} - \int\limits_{C_2 C_1} \frac{dz}{z} = \int\limits_{\gamma} \frac{dz}{z} - 2\pi i,$$

deoarece $C_2 \cdot C_1$ este drumul circular $\theta \longmapsto \varepsilon \cdot e^{i\theta}$, $\theta \in [\theta_1, \theta_1 + 2\pi]$.

Dar

$$\int\limits_{\Gamma_1} \frac{dz}{z} = 2\pi i n(\Gamma_1, 0) = 0$$

deoarece $\theta \in A^+$, $S(\Gamma_1) \cap A^+ = \emptyset$ şi A^+ este mulţime conexă şi nemărginită, deci 0 aparţine componentei conexe nemărginite a lui $C \setminus S(\Gamma_1)$. Analog obţinem

$$\int\limits_{\Gamma_2} \frac{dz}{z} = 2\pi i n(\Gamma_2, 0) = 0$$

şi atunci $\int\limits_{\gamma} (dz/z) = 2\pi i$, adică $n(\gamma, 0) = 1$. Demonstraţia se încheie.

11.2 Versiunea omologică a teoremei integrale Cauchy

Reamintim că dacă D este un disc deschis în $\mathbb{C}$ şi $\mathcal{H}(D)$, atunci pentru orice drum închis parţial neted γ în D avem $\int\limits_{\gamma} f(z)dz = 0$. Acest rezultat însă nu rămâne adevărat pentru un domeniu oarecare Ω în locul lui D. De exemplu, pentru $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, funcţia $f(z) = 1/z$ şi drumul $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ avem $\int\limits_{\gamma}(1/z)dz = 2\pi i$. Aici dificultatea este dată de prezenţa "găurii" $\{0\}$ în $\mathbb{C}^*$.

În această secţiune vom prezenta condiţii asupra lui Ω şi (sau) γ astfel ca $\int\limits_{\gamma} f(z)dz = 0$ pentru orice $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Mai precis, impunem o condiţie care se exprimă în termenii indexului lui γ relativ la punctele din complementara lui Ω. Începem cu următoarea lemă:

Lema 11.2.1. *Fie γ un drum parţial neted în $\mathbb{C}$, $f : S(\gamma) \to \mathbb{C}$ o funcţie continuă pe $S(\gamma)$ şi pentru $m \geqq 1$ natural, fie funcţia*

$$F_m(w) = \int\limits_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-w)^m} dz \quad (w \in \mathbb{C} \setminus S(\gamma)).$$

Atunci F_m este olomorfă pe $\mathbb{C} \setminus S(\gamma)$ şi $F'_m = mF_{m+1}$.

Demonstraţie. Întâi arătăm că F_m este o funvţie continuă. Pentru aceasta observăm că $a, w \in \mathbb{C} \setminus (\gamma)$ şi $z \in S(\gamma)$ avem

$$\frac{1}{(z-w)^m} - \frac{1}{(z-a)^m} = \left(\frac{1}{z-w} - \frac{1}{z-a}\right) \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(z-w)^{m-k}(z-a)^{k-1}} =$$
$$= \left[\frac{1}{(z-w)^m(z-a)} + \frac{1}{(z-w)^{m-1}(z-a)^2} + \ldots + \frac{1}{(z-w)(z-a)^m}\right].$$

Acum deoarece $S(\gamma)$ este compact şi f este continuă pe $S(\gamma)$, f va fi mărginită, deci există $M > 0$ astfel ca $|f(z)| \leqq M$ pentru orice $z \in S(\gamma)$. Astfel, folosind factorizarea de mai sus obţinem

$$|F_m(w) - F_m(a)| = \left| \int\limits_{\gamma} f(z) \left[\frac{1}{(z-w)^m} - \frac{1}{(z-a)^m}\right] dz \right| \leqq$$
$$\leqq M|w-a| \sum_{k=0}^{m-1} \int\limits_{\gamma} \frac{dz}{|z-w|^{m-k}|z-a|^{k+1}}.$$

În continuare, dacă $r > 0$ este distanţa lui a la $S(\gamma)$ şi $|w-a| < r/2$ avem

$$\begin{aligned}|F_m(w) - F_m(a)| &\leqq M|w-a| \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{2}{r}\right)^{m-k} \cdot \left(\frac{2}{r}\right)^{k+1} \\ &= M \cdot m \left(\frac{2}{r}\right)^{m+1} |w-a|.\end{aligned}$$

Deci pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta > 0$, $\delta \leqq \min(r/2, r^{m+1}/2^{m+1}m \cdot M)$ astfel că dacă $w \in \mathbb{C} \setminus S(\gamma)$ şi $|w-a| < \delta$, atunci $|F_m(w) - F_m(a)| < \varepsilon$, adică F_m este continuă în a. Cum a este arbitrar, F_m este continuă pe $\mathbb{C} \setminus S(\gamma)$ şi aceasta pentru orice $m \geqq 1$.

Acum fixăm $a \in \mathbb{C} \setminus S(\gamma)$ şi fie $w \in \mathbb{C} \setminus S(\gamma)$, $w \neq a$. Folosind de asemenea factorizarea de mai sus obţinem

$$\frac{F_m(w) - F_m(a)}{w-a} = \sum_{k=0}^{m-1} \int_\gamma \frac{f(z)(z-a)^{-k-1}}{(z-w)^{m-k}} dz.$$

Deoarece $a \notin S(\gamma)$, funcţiile $f(z)(z-a)^{-j}$, $1 \leq j \leq m$, sunt continue pe $S(\gamma)$. Deci, în baza celor arătate anterior, fiecare integrală din suma de mai sus, defineşte o funcţie continuă (în variabila w) pe $\mathbb{C} \setminus S(\gamma)$. Prin urmare există limita pentru $w \longrightarrow a$ în egalitatea precedentă, adică F_m este $\mathbb{C}-$derivabilă în a şi avem

$$F'_m(a) = \sum_{k=0}^{m-1} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{m+1}} dz = mF_{m+1}(a).$$

Punctul a fiind arbitrar în $\mathbb{C} \setminus S(\gamma)$, rezultă că F_m este olomorfă pe $\mathbb{C} \setminus S(\gamma)$ şi $F'_m = mF_{m+1}$.

Teorema 11.2.2. *Fie Ω o mulţime deschisă în $\mathbb{C}$ şi $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Dacă $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ sunt drumuri închise parţial netede în Ω astfel că $n(\gamma_1, w) + \ldots + n(\gamma_m, w) = 0$ pentru orice $w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, atunci pentru orice $a \in \Omega \setminus \bigcup_{k=1}^{m} S(\gamma_k)$ avem*

$$f(a) \sum_{k=1}^{m} n(\gamma_k, a) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{m} \int_{\gamma_k} \frac{f(z)}{z-a} dz. \tag{11.6}$$

Demonstraţie. Definim funcţia $\varphi : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ prin

$$\varphi(z,w) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(w)}{z-w}, & z \neq w \\ f'(z), & z = w. \end{cases}$$

Rezultă simplu că φ este continuă pe $\Omega \times \Omega$ şi pentru fiecare $w \in \Omega$, funcţia $\varphi(\cdot, w)$ este olomorfă pe Ω. Considerăm mulţimea

$$A = \{w \in \mathbb{C} : \ n(\gamma_1, w) + \ldots + n(\gamma_m, w) = 0\}$$

care este deschisă, deoarece fiecare funcţie index $n(\gamma_k, w)$ este continuă în variabila $w \in \mathbb{C} \backslash S(\gamma_k)$, $1 \leq k \leq m$. De asemenea, în baza ipotezei avem $\mathbb{C} \backslash \Omega \subset A$, deci obţinem $A \cup \Omega = \mathbb{C}$.

Vom defini funcţia $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ prin

$$g(z) = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{m} \int\limits_{\gamma_k} \varphi(z, w) dw, & z \in \Omega \\ \sum\limits_{k=1}^{m} \int\limits_{\gamma_k} \frac{f(w)}{w-z} dw, & z \in A. \end{cases}$$

Notăm că pentru $z \in A \cap \Omega$ avem

$$\sum_{k=1}^{m} \int_{\gamma_k} \varphi(z, w) dw = \sum_{k=1}^{m} \int_{\gamma_k} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} dw =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \int_{\gamma_k} \frac{f(w)}{w - z} dw - 2\pi i \ f(z) \sum_{k=1}^{m} n(\gamma_k, z) = \sum_{k=1}^{m} \int_{\gamma_k} \frac{f(w)}{w - z} dz$$

şi deci funcţia g este corect definită. Deoarece $A \subset \mathbb{C} \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{m} S(\gamma_k)$, cu lema precedentă rezultă că g este derivabilă pe A. Pe de altă parte, cum $\varphi(z, w)$ este funcţie derivabilă în variabila z pentru $w \in \Omega$, cu teoremele lui Morera şi Fubini rezultă că g este olomorfă pe Ω. Deci g este o funcţie întreagă (olomorfă pe $\mathbb{C}$). Apoi din teorema indexului rezultă că A conţine componenta conexă nemărginită a lui $\mathbb{C} \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{m} S(\gamma_k)$ şi deci A conţine o vecinătate a lui ∞. Apoi, cum f este mărfinită pe $S(\gamma_k)$ şi există $\lim\limits_{z \to \infty} (w - z)^{-1} = 0$ uniformă pentru $w \in S(\gamma_k)$, $1 \leq k \leq m$, obţinem

$$\lim_{z \to \infty} g(z) = \lim_{z \to \infty} \sum_{k=1}^{m} \int_{\gamma_k} \frac{f(w)}{w - z} dz = 0.$$

Urmează că există $R > 0$ astfel că $|g(z)| \leqq 1$ pentru $|z| \geqq R$. Deoarece g este mărginită şi pe $\overline{D}(0, R)$, rezultă că g este o funcţie întreagă mărginită. Deci cu teorema lui Liouville g este constantă şi datorită limitei lui g la ∞ avem că $g = 0$ pe $\mathbb{C}$. Astfel, dacă $a \in \Omega \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{m} S(\omega)$, obţinem

$$0 = \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{\gamma_k} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} dz = \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{\gamma_k} \frac{f(z)}{z - a} dz - 2\pi i \, f(a) \sum_{k=1}^{m} n(\gamma_k, a),$$

de unde formula (11.6). Demonstraţia se încheie.

Dacă Ω este o deschisă în $\mathbb{C}$ şi γ un drum închis parţial neted în Ω, spunem că γ este *omolog cu zero* (sau *nul omolog*) în Ω şi notăm $\gamma \approx 0(\Omega)$, dacă $n(\gamma, w) = 0$ pentru orice $w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$.

Cu această definiţie, din teorema 11.2.2 obţinem

Corolarul 11.2.3. *Fie G o mulţime deschisă în $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ şi γ un drum închis parţial neted şi omolog cu zero în Ω. Atunci pentru orice $a \in \Omega \setminus S(\gamma)$ avem*

$$n(\gamma, a) f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(z)}{z - a} dz. \tag{11.7}$$

Formula (11.7) dă în particular formulele lui Cauchy pentru drumuri triunghiulare, dreptunghiulare, sau circulare. De asemenea formula (11.6) conţine ca un caz particular formula lui Cauchy pentru coroane circulare.

Să mai notăm că, la fel ca în cazurile particulare menţionate mai sus, are loc şi în cazul general o formulă integrală pentru derivate. Mai exact, avem

Corolarul 11.2.4. *Fie Ω o mulţime deschisă în $\mathbb{C}$ şi $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Atunci pentru orice drum γ închis parţial neted şi omolog cu zero în Ω şi pentru orice $a \in \Omega \setminus S(\gamma)$ avem*

$$n(\gamma, a) f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - a)^{n+1}} dz \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{11.8}$$

Următorul rezultat, este de asemenea important în analiza complexă.

Teorema 11.2.5.(Cauchy). *Fie Ω o mulţime deschisă în $\mathbb{C}$ şi $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Dacă $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ sunt drumuri închise parţial netede în Ω astfel că $n(\gamma, w) + \ldots + n(\gamma_m, w) = 0$ pentru orice $w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, atunci*

$$\sum_{k=1}^{m} \int\limits_{\gamma_k} f(z) dz = 0. \tag{11.9}$$

Demonstraţie. Se aplică Teorema 11.2.2 funcţiei $f(z)(z-a)$ cu $a \in \Omega$, $a \notin \bigcup\limits_{k=1}^{m} S(\gamma_k)$.

În secţiunea următoare vom da o altă condiţie relativă la un drum γ pentru ca $\int\limits_\gamma f = 0$, unde f este olomorfă pe o deschisă ce conţine suportul lui γ. Condiţia este mai puţin generală, dar mai geometrică decât condiţia de omologie cu zero a lui γ.

11.3 Variaţia argumentului şi aplicaţii deschise

În continuare prezentăm câteva aplicaţii importante ale teoremei 11.2.5. Pentru $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ şi $a \in Z(f)$ notăm $ord_a(f)$ ordinul de multiplicitate al zeroului a pentru f.

Teorema 11.3.1. *Fie Ω o mulţime deschisă în $\mathbb{C}$ şi $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ o funcţie având mulţimea zerourilor $Z(f)$ finită în Ω. Fie γ un drum închis parţial neted şi omolog cu zero în Ω, astfel că $S(\gamma) \cap Z(f) = \emptyset$. Atunci*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{a \in Z(f)} n(\gamma, a) ord_a(f). \tag{11.10}$$

Demonstraţie. Fie $Z(f) = \{a_1, \dots, a_m\} \subset \Omega$ şi $n_k = ord_{a_k}(f)$. Atunci există o funcţie $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ cu $g(z) \neq 0$ şi $f(z) = (z-a)^{n_1} \dots (z-a_m)^{n_m} \cdot g(z)$ pentru orice $z \in \Omega$. Aplicând formula de derivare a unui produs obţinem că

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n_1}{z-a_1} + \dots + \frac{n_m}{z-a_m} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

pentru orice $z \in \Omega$, $z \neq a_k$, $1 \leq k \leq m$. Dar $g'/g \in \mathcal{H}(\Omega)$ şi cum $\gamma \approx 0$ în Ω, teorema 11.2.5 implică $\int\limits_\gamma (g'/g)(z)dz = 0$. Astfel integrând pe γ funcţia f'/f cu reprezentarea de mai sus şi folosind definiţia indexului, deducem egalitatea (11.10). Demonstraţia se încheie.

Versiunea pentru funcţii meromorfe a teoremei precedente este cunoscută ca *principiul variaţiei argumentului.* Motivaţia acestei terminologii o dăm mai jos.

Pentru $f \in \mathcal{M}(\Omega)$, adică f meromorfă pe Ω, vom nota, ca de obicei, cu $Z(f)$ mulţimea zerourilor şi cu $\mathcal{P}(f)$ mulţimea polilor lui f din Ω. Vom considera numai funcţii meromorfe pe Ω care nu sunt identic nule pe nici o componentă conexă a lui Ω şi care sunt presupuse extinse prin olomorfie în singularităţile lor aparente (eliminabile). Pentru $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ şi $a \in \mathcal{P}(f)$, ordinul lui f în a este $ord_a(f) = \inf\{n \in \mathbb{Z} : \ c_n \neq 0\}$ unde $\{c_n\}$ sunt coeficienţii seriei Laurent a lui f în a.

Teorema 11.3.2. *Fie Ω o mulţime deschisă în $\mathbb{C}$ şi $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ astfel că mulţimile $Z(f)$ şi $\mathcal{P}(f)$ sunt finite. Fie γ un drum închis parţial neted şi omolog cu zero în Ω, astfel că $S(\gamma) \cap [Z(f) \cup \mathcal{P}(f)] = \emptyset$. Atunci*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)dz}{f(z)} = \sum_{a \in Z(f) \cup \mathcal{P}(f)} n(\gamma, a) ord_a(f). \tag{11.11}$$

Demonstraţie. Fie $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ şi presupunem că $Z(f) = \{a_1, \ldots, a_p\}$, $\mathcal{P}(f) = \{b_1, \ldots, b_q\}$. Fie $n_j = ord_{a_j}(f) > 0$, $1 \leq j \leq p$ şi $m_k = -ord_{b_k}(f) > 0$, $1 \leq k \leq q$. Factorizând succesiv funcţia f relativ la zerouri şi poli, rezultă că există o funcţie $h \in \mathcal{H}(\Omega)$, astfel că $h(z) \neq 0$ pentru $z \in \Omega$ şi

$$f(z) = (z-a_1)^{n_1} \ldots (z-a_p)^{n_p} (z-b_1)^{-m_1} \ldots - \frac{m_q}{z-b_q} + \frac{h'(z)}{h(z)}$$

pentru $z \in \Omega$, $z \notin Z(f) \cup \mathcal{P}(f)$. Integrând apoi f'/f pe γ şi aplicând teorema 11.2.5 pentru h'/h, rezultă egalitatea (11.11). Demonstraţia se încheie.

Dacă $w \in \mathbb{C}$, este clar că rădăcinile ecuaţiei $f(z) = w$ sunt zerourile funcţiei $f - w$. Numim aceste rădăcini w-puncte ale lui f, ordinul unui astfel de punct "a" va însemna ordinul său de multiplicitate ca zerou al lui $f - w$ şi îl vom nota prin $ord_a^w(f)$. Aplicând teorema 11.3.2 funcţiei $f - w$ obţinem

Corolarul 11.3.3. *Fie Ω o mulţime deschisă în $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ şi $w \in \mathbb{C}$ astfel încât $f^{-1}(w)$ şi $\mathcal{P}(f)$ sunt finite. Dacă γ este un drum închis parţial neted şi nul omolog în Ω, încât $S(\gamma) \cap [f^{-1}(w) \cup \mathcal{P}(f)] = \emptyset$, atunci*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)-w}dz = \sum_{a \in f^{-1}(w)} n(\gamma, a) ord_a^w(f) + \\ + \sum_{a \in \mathcal{P}(f)} n(\gamma, a) ord_a(f). \tag{11.12}$$

Observaţie. Observăm că în ipotezele corolarului anterior, $\widehat{\gamma} := f \circ \gamma$ este un drum închis şi parţial neted astfel încât $w \notin S(\widehat{\gamma})$, iar membrul stâng din relaţia (11.12) este $n(\widehat{\gamma}, w)$. Prin urmare, această relaţie se mai scrie

$$n(\widehat{\gamma}, w) = \sum_{a \in f^{-1}(w)} n(\gamma, a) ord_a^w(f) + \sum_{b \in \mathcal{P}(f)} n(\gamma, a) ord_b(f)$$

ţinând cont de interpretarea geometrică a indexului (Propoziţia 11.1.3), formulele de mai sus ne arată că variaţia argumentului razei mobile având un punct fix în w şi celaltă extremitate pe transformata prin f a unui contur γ, se exprimă ca suma variaţiilor argumentului razelor ce pleacă din $w-$punctele sau din polii lui f şi se sprijină pe conturul iniţial γ, variaţia relativă la fiecare $w-$puncte sau pol al lui f socotindu-se de atâtea ori cât indică ordinul respectiv de multiplicitate.

Observaţie. În condiţiile Corolarului 11.3.3, dacă alegem γ un drum circular (simplu) $S(\gamma) = D(z_0, r)$ şi notăm N_w, P numărul $w-$punctelor, respectiv numărul polilor lui f din $D(z_0, r)$ (numărate fiecare de câte ori indică ordinul lor de multiplicitate), atunci variaţia argumentului va fi

$$n(\widehat{\gamma}, w) = N_w - P,$$

care în limbajul de mai sus are următoarea interpretare geometrică: înconjurând odată pe $S(\gamma)$ polii şi rădăcinile ecuaţiei $f(z) = w$, punctul w va fi "înconjurat" de către imaginea prin f a lui γ, de atâtea ori cât indică diferenţa dintre numărul $w-$punctelor lui f şi polii săi din $D(z_0, r)$. în acest caz, formula

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z) - w} = N_w - P$$

indică şi o metodă de calcul a integralei din membrul stâng, dacă se cunosc rădăcinile şi polii numitorului.

Acum dăm o generalizare a Teoremei 11.3.2.

Teorema 11.3.4. *Fie Ω o mulţime deschisă în $\mathbb{C}$ şi $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ astfel că mulţimile $Z(f)$ şi $\mathcal{P}(f)$ sunt finite. Fie $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ şi γ un drum închis parţial neted şi omolog cu zero în Ω, astfel că $S(\gamma) \cap [Z(f) \cup \mathcal{P}(f)] = \emptyset$. Atunci*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \left(\frac{f'}{f} g\right)(z)dz = \sum_{a \in Z(f) \cup \mathcal{P}(f)} g(a)n(\gamma, a)ord_a(f). \tag{11.13}$$

Demonstraţie. Din demonstraţia teoremei 11.3.2 avem (păstrând notaţiile)

$$\left(\frac{f'}{f} g\right)(z) = \left(\frac{n_1}{z - a_1} + \ldots + \frac{n_p}{z - a_p} - \frac{m_1}{z - b_1} - \ldots - \frac{m_q}{z - b_q}\right) g(z) +$$
$$+ \left(\frac{h'}{h} g\right)(z)$$

pentru orice $z \in \Omega$, $z \notin Z(f) \cup \mathcal{P}(f)$. Dar $\frac{h'}{h} g \in \mathcal{H}(\Omega)$, deci cu teorema 11.2.5 avem $\int\limits_{\gamma} (h'g/h)dz = 0$. Atunci integrând $f'g/f$ cu reprezentarea de mai sus pe drumul γ şi folosind corolarul 11.2.3 obţinem egalitatea (11.13).

Observaţie. În afară de cazul particular $g(z) = 1$, remarcabil în generalizarea anterioară este de asemenea cazul $g(z) = z$. Exprimăm acest lucru pentru situaţia în care γ este un drum circular simplu cu $S(\gamma) = D(a, r)$:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} z \frac{f'}{f - w} dz = \sum_{k=1}^{m} n_k a_k - \sum_{j=1}^{n} m_j b_j \tag{11.14}$$

unde $a_1, \ldots, a_m$ sunt $w-$punctele lui f din $D(z_0, r)$ cu ordinele de multiplicitate respective n_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$, iar $b_1, \ldots, b_n$ sunt polii lui f din $D(z_0, r)$ cu ordinele de multiplicitate respective m_j $(j = 1, \ldots, n)$.

Particularizând (11.14) pentru cazul în care f este injectivă obţinem o reprezentare integrală pe un drum circular $\partial D(a, r)$ a funcţiei inverse a lui f. Iată enunţul complet al acestui rezultat.

Corolarul 11.3.5. *Fie Ω o mulţime deschisă în $\mathbb{C}$, $a \in \Omega$ şi $r > 0$ astfel că $\overline{D}(a, r) \subset \Omega$, iar $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ o funcţie injectivă pe $D(a, r)$. Atunci*

$$f^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D(a,r)} \frac{z f'(z)}{f(z) - w} dz \quad (w \in f(D(a, r))). \tag{11.15}$$

Demonstraţie. Dacă $w \in f(D(a, r))$ funcţia f are un singur $w-$punct ξ în $D(a, r)$, adică $f^{-1}(w) = \xi$. în acest caz în dreapta lui (11.14) rămâne un singur termen ξ. Ca atare formula (11.14) devine (11.15).

În încheierea acestei secţiuni mai facem câteva observaţii privind zerourile funcţiilor olomorfe.

Observaţie. Fie Ω un domeniu în $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ şi γ un drum închis parţial neted şi omolog cu zero în Ω. Fie $w \in \mathbb{C}$, $w \in f(S(\gamma))$. Atunci, în general, mulţimea $f^{-1}(w)$ poate să fie infinită, atunci, dacă $f \neq 0$ şi $f^{-1}(w) = \{a_k : k \in \mathbb{N}\}$ este infinită un subşir al lui $\{a_k\}$ converge la un punct $a \in \partial\Omega$. Arătăm că există $m \in \mathbb{N}$ astfel că $n(\gamma, a_k) = 0$ pentru orice $k > m$. Pentru aceasta, fie $r = d(S(\gamma), \partial\Omega) > 0$ şi $A = \{z \in \mathbb{C} : \ n(\gamma, z) = 0\}$. Evident $\partial\Omega \subset \mathbb{C} \setminus \Omega \subset A$ deoarece γ este nul omolog în Ω. Apoi dacă $z \in \mathbb{C}$ şi $d(z, \partial\Omega) < r/2$. Cum $D(w, r/2) \cap S(\gamma) = \emptyset$, rezultă că z şi w sunt în aceeaşi componentă conexă a lui $\mathbb{C} \setminus S(\gamma)$ şi deci $n(\gamma, z) = n(\gamma, w) = 0$. Astfel avem că $\{z \in \Omega : \ d(z, \partial\Omega) < r/2 \subset A$ şi în particular $D(a, r/2) \subset A$. Dar din convergenţa $a_k \to a$ există $k_0 \in \mathbb{N}$ astfel că $a_k \in D(a, r/2)$ pentru $k \geq k_0$. Deci

$n(\gamma, a_k) = 0$ pentru $k > m = k_0 - 1$ şi putem presupune că $n(\gamma, a_k) \neq 0$ pentru $k \leq m$. Astfel, putem conclude că ipotezele din teoremele anterioare, anume că mulţimea zerourilor şi respectiv mulţimea polilor să fie finite, nu restrâng generalitatea.

În condiţiile de mai sus, pentru $w, a_1, \ldots, a_m$ avem pentru $\widehat{\gamma} = f \circ \gamma$,

$$n(\widehat{\gamma}, w) = \sum_{k=1}^{m} n(\gamma, a_k) ord_{a_k}^{w}(f),$$

egalitatea fiind bazată pe una din observaţiile anterioare şi pe discuţia precedentă.

Acum dacă w şi ξ sunt în aceeaşi componentă conexă a lui $\mathbb{C} \setminus S(\widehat{\gamma})$, atunci $n(\widehat{\gamma}, w) = n(\widehat{\gamma}, \xi)$, adică

$$\sum_{k=1}^{m} n(\gamma, a_k) ord_{a_k}^{w}(f) = \sum_{j=1}^{p} n(\gamma, b_j) ord_{b_j}^{\xi}(f),$$

unde $b_1, \ldots, b_p$ sunt zerourile funcţiei $f - \xi$ cu $n(\gamma, b_j) \neq 0$, $1 \leq j \leq p$. Acest fapt conţine anumite informaţii privind zerourile funcţiilor $f - w$ şi $f - \xi$, dar o informaţie şi mai precisă poate fi obţinută acum.

Teorema 11.3.6. *Fie $D = D(a, r)$ un disc deschis în $\mathbb{C}$ şi $f \in \mathcal{H}(D)$. Dacă $b \in D$ este un zero de ordinul $m > 0$ pentru $f - f(a)$, atunci există $\varepsilon > 0$ şi $\delta > 0$ astfel că pentru $w \in D^*(f(a), \delta)$ funcţia $f - w$ are exact m zerouri simple în $D^*(b, \varepsilon) = D(b, \varepsilon) \setminus \{b\}$.*

Demonstraţie. Deoarece $b \in Z(f - f(a))$ şi $ord_b(f - f(a)) = m > 0$, rezultă că $f \neq 0$ pe D. Apoi, cum zerourile unei funcţii olomorfe neconstante sunt puncte izolate, există $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < r/2$, astfel că $f(z) \neq f(a)$ şi $f'(z) \neq 0$ pentru $D^*(b, 2\varepsilon)$. Fie acum drumul circular $\gamma := \partial D(b, \varepsilon)$ în $D^*(b, 2\varepsilon)$. Atunci $f(a) \notin S(f \circ \gamma)$ şi cum $S(f \circ \gamma)$ este mulţime închisă, rezultă că există $\delta > 0$ astfel că $D(f(a), \delta) \cap S(f \circ \gamma) = \emptyset$. Deci discul $D(f(a), \delta)$ este conţinut în aceeaşi componentă conexă a lui $\mathbb{C} \setminus S(f \circ \gamma)$. Prin urmare, dacă $w \in D(f(a), \delta)$ atunci prin remarca anterioară avem

$$m = m \cdot n(\gamma, b) = n(f \circ \gamma, f(a)) = n(f \circ \gamma, w) =$$
$$= \sum_{k=1}^{p} n(\gamma, a_k) \cdot ord_{a_k}^{w}(f),$$

unde $a_1, \ldots, a_p$ sunt $w-$punctele funcţiei f din discul $D(b, \varepsilon)$. Deoarece $n(\gamma, z)$ este egal cu 1, sau cu 0 pentru orice z şi deoarece $f'(z) \neq 0$ pentru $z \in D^*(b, \varepsilon)$, rezultă că pentru orice $w \in D^*(f(a), \delta)$, fiecare a_k este un zerou simplu al lui $f - w$. Din egalitatea de mai sus urmează că pentru $w \in D^*(f(a), \delta)$, funcţia $f - w$ are exact m zerouri simple în $D^*(b, \varepsilon)$. Demonstraţia se încheie.

Teorema precedentă poate fi folosită pentru a obţine o teoremă importantă a analizei complexe, anume *principiului aplicaţiei deschise.*

Teorema 11.3.7.*Fie Ω o mulţime deschisă în $\mathbb{C}$ şi $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ o funcţie nelocal constantă în nici un punct din Ω. Atunci pentru orice mulţime deschisă $G \subset \Omega$, $f(G)$ este o mulţime deschisă în $\mathbb{C}$.*

Demonstraţie. Fie $G \subset \Omega$ o mulţime deschisă, $a \in G$ şi $r > 0$ astfel ca $D(a, r) \subset G$. Atunci din teorema precedentă rezultă că există $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < r$ şi $\delta > 0$ astfel că $D(f(a), \delta) \subset f(D(a, \varepsilon))$ şi deci $D(f(a), \delta) \subset f(D(a, r)) \subset f(G)$. Prin urmare $f(a)$ este punct interior pentru $f(G)$, oricare ar fi $a \in G$ şi astfel $f(G)$ este deschisă în $\mathbb{C}$. Demonstraţia se încheie.

Corolarul 11.3.8.*Dacă D este un domeniu în $\mathbb{C}$ şi $f \in \mathcal{H}(D)$ este neconstantă pe D atunci $f(D)$ este domeniu în $\mathbb{C}$.*

Deomnstraţie. $f(D)$ este conexă (f fiind continuă) şi deschisă în $\mathbb{C}$ (prin teorema precedentă), deci $f(D)$ este un domeniu în $\mathbb{C}$.

11.4 Teorema Reziduurilor

Fie Ω o mulţime deschisă în $\mathbb{C}$ şi $E \subset \Omega$ o submulţime discretă (adică închisă în Ω şi fără puncte de acumulare.)

Fie $a \in E$ şi $r > 0$ astfel că $\overline{D}(a, r) \subset \Omega$ şi $\overline{D}(a, r) \cap E = \{a\}$.

Dacă $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus E)$ atunci putem considera reprezentarea în serie Laurent a lui f pe discul redus $D^*(a, r)$, anume

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n, \quad z \in D^*(a, r).$$

Cum ştim deja, numărul $Rez(f, a) := c_{-1}$ se numeşte *reziduul* lui f în a. Acesta mai poate fi exprimat prin integrala

$$Rez(f, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(a,\rho)} f(z) dz, \quad 0 < \rho < r. \tag{11.16}$$

Astfel spus, integrala lui f pe orice drum circular (simplu) cu suportul în $D^*(a, r)$ este dată de reziduul lui f în punctul a, a fiind o singularitate izolată pentru f.

Se pune în mod natural întrebarea dacă integrala lui f pe alte drumuri mai generale decât cele circulare, mai poate fi exprimată cu ajutorul reziduurilor lui f în anumite puncte singulare izolate pentru f? Cunoaştem deja că acest lucru este posibil pentru anumite contururi, iar acum vom stabili formula reziduurilor pentru drumuri nul omoloage în Ω.

Teorema 11.4.1. *Fie Ω o mulţime deschisă în $\mathbb{C}$, E o submulţime discretă a lui Ω şi γ un drum nul omolog în Ω cu $S(\gamma) \cap E = \emptyset$. Atunci mulţimea $\{a \in E : n(\gamma, a) \neq 0\}$ este finită şi pentru orice funcţie $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus E)$ avem*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{a \in E} Rez(f, a) n(\gamma, a).$$

Demonstraţie. Deoarece drumul γ este nul omolog în Ω, mulţinea

$$\Omega_{\gamma} := \{z \in \Omega \setminus S(\gamma) : n(\gamma, z) \neq 0\}$$

nu intersectează componenta conexă nemărginită a lui $\mathbb{C} \setminus S(\gamma)$. Deci Ω_{γ} este conţinută între reuniunea componentelor conexe mărginite ale lui $\mathbb{C} \setminus S(\gamma)$, în particular $E \cap \Omega_{\gamma}$ este mărginită şi prin urmare finită, întrucât E nu are puncte de acumulare în Ω. Însă mulţimea $G = \Omega_{\gamma} \cup S(\gamma)$ este deschisă în Ω ($\Omega \setminus G = \{z \in \Omega \setminus S(\gamma) : n(\gamma, \cdot) = 0\}$ fiind închisă în Ω) şi $E \cap G = E \cap \Omega_{\gamma}$. Mai mult, drumul γ este nul omolog în G deoarece $\mathbb{C} \setminus G = (\mathbb{C} \setminus \Omega_{\gamma}) \cap (\mathbb{C} \setminus S(\gamma))$ şi astfel $n(\gamma, w) = 0$ pentru $w \in \mathbb{C} \setminus G$.

Considerăm $E \cap G = \{a_1, \ldots, a_n\}$ şi fie $g_j = f - f_j$ unde f_j este partea tayloriană analitică din reprezentarea Laurent a lui f în punctul a_j, $j = 1, \ldots, n$. Atunci funcţia $f - \sum\limits_{j=1}^{n} g_j = \sum\limits_{j=1}^{n} f_j$ este olomorfă pe G şi cum γ este nul omolog în G rezultă

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma} g_j(z) dz.$$

Scriind reprezentarea Laurent a lui g_j în forma

$$g_j(z) = \sum_{k=-\infty}^{-1} c_{k,j} (z - a_j)^k \quad (z \in D^*(a_j, r) \subset G),$$

cum seria este uniform convergentă pe $S(\gamma)$ obţinem

$$\int_{\gamma} g_j(z) dz = \sum_{k=-\infty}^{-1} c_{k,j} \int_{\gamma} (z - a_j)^k dz = c_{-1,j} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - a_j} = 2\pi i c_{-1,j} n(\gamma, a_j).$$

Aici am folosit faptul că $\int\limits_\gamma (z-a_j)^k dz = 0$ pentru $k \neq -1$, integrandul fiind funcţie primitivabilă pe $\mathbb{C} \setminus \{a_j\}$, $j = 1, \ldots, n$. Rezultă că

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma f(z)dz = \sum_{j=1}^{n} Rez(f, a_j) n(\gamma, a_j) = \sum_{a \in E} Rez(f, a) n(\gamma, a)$$

deoarece $n(\gamma, a) = 0$ pentru $a \in E \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$. Demonstraţia se încheie.

Acum presupunem că ∞ este punct singular pentru o funcţie olomorfă f, adică există $r > 0$ astfel că f este olomorfă pe mulţimea $\{z \in \mathbb{C} : \ |z| > r\} = \mathbb{C} \setminus \overline{D}(0, r)$, această mulţime fiind o coroană circulară centrată în $z = 0$, cu raza mică r şi raza mare $+\infty$. Atunci f are reprezentarea Laurent de forma

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \quad (|z| > r).$$

Considerăm funcţia g pe $D^* \left(0, \frac{1}{r}\right)$ dată prin $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ şi pentru $\rho > r$ fie γ_0 drumul circular definit prin $\gamma_0(t) = \frac{1}{\rho} e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Deoarece g este olomorfă pe $D^* \left(0, \frac{1}{r}\right)$, din seria de mai sus a lui f deducem seria Laurent a lui g pe $D^* \left(0, \frac{1}{r}\right)$ şi cum $S(\gamma_0) \subset D^* \left(0, \frac{1}{r}\right)$, coeficientul a_{-1} poate fi exprimat relativ la funcţia

$$g(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^{-n} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{-j} z^j = \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j z^j \quad (0 < |z| < \frac{1}{r})$$

şi drumul γ_0, prin

$$\begin{aligned} a_{-1} = b_1 &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_0} \frac{g(z)}{z^2} dz = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^{2\pi} f\left(\rho e^{-it}\right) \rho i e^{-it} dt \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^{2\pi} f\left(\rho e^{-it}\right) \left(-\rho i e^{-it}\right) dt = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma f(z) dz \end{aligned}$$

unde $f(t) = \rho e^{-it}$, $t \in [0, 2\pi]$ este inversul unui drum circular în coroana $\{|z| > r\}$. Acest fapt sugerează definiţia reziduului funcţiei f în ∞ ca fiind

$$Rez(f, \infty) := -a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma f(z)dz,$$

unde γ semnifică orice drum circular invers (simplu) cu $S(\gamma)$ în coroana $\{|z| > r\}$, iar coeficientul a_{-1} fiind din seria Laurent a lui f pe această coroană. Această definiţie a reziduului în ∞ este în concordanţă cu definiţia reziduului în puncte finite, având aceeaşi semnificaţie şi anume integrala funcţiei pe drumuri circulare din coroana de olomorfie a funcţiei.

În aplicaţii este adesea mai util să exprimăm reziduul în ∞ al unei funcţii prin reziduul în 0 al altei funcţii. Mai precis, se poate observa că $Rez(f,\infty) = Rez(h,0)$ unde h este funcţia

$$h(z) = -\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), \quad z \in D^*\left(0, \frac{1}{r}\right).$$

Exemplu. Să calculăm reziduul în ∞ al funcţiei $f(z) = ze^{-\frac{1}{z}}$, $z \in \mathbb{C}^*$. Avem $h(z) = -\frac{1}{z^3 e^z}$, $z \neq 0$, din $z = 0$ este pol de ordinul 3 pentru h. Prin urmare

$$Rez(f,\infty) = Rez(h,0) = -\frac{1}{2} \lim_{z\to 0} \left(\frac{1}{e^z}\right)' = -\frac{1}{2} \lim_{z\to 0} \frac{1}{e^z} = -\frac{1}{2}.$$

Utilizarea practică a reziduului în ∞ este motivată şi de următoarea **Propoziţia 11.4.2.** *Fie* $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{a_1,\ldots,a_n\})$ *cu* $a_j \in \mathbb{C}$. *Atunci*

$$\sum_{j=1}^{n} Rez(f,a_j) + Rez(f,\infty) = 0.$$

Demonstraţie. Fie $r > r_0 > \max\limits_{1\le j\le n} |a_j|$ şi $\gamma = \partial D(0,r_0)$. Atunci drumul γ este nul omolog în $\Omega = D(0,r)$ prin teorema indexului ($\mathbb{C}\setminus\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| \geq r\}$ fiind în componenta conexă nemărginită a lui $\mathbb{C}\setminus S(\gamma) = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| > r_0\}$.) Cum $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a_1,\ldots,a_n\})$ şi $a_j \notin S(\gamma)$, iar $n(\gamma,a_j) = 1$, $j = 1,\ldots,n$ din formula rezidurilor (11.16) şi definiţia reziduului lui f în ∞ avem

$$\sum_{j=1}^{n} Rez(f,a_j) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} f(z)dz = -Rez(f,\infty).$$

Demonstraţia se încheie.

Formula reziduurilor are multiple aplicaţii în analiza matematică. Câteva aplicaţii privind calculul unor integrale Riemann (proprii sau improprii), sau a sumelor unor serii de funcţii vor fi date în secţiunile următoare.

11.5 Aplicaţii ale teoremei reziduurilor la calculul integralelor

Începem cu calculul unor integrale Riemann reale.

Propoziţia 11.5.1. *Fie $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\xi, \eta)$ o funcţie raţională reală care nu are poli pe cercul $\xi^2 + \eta^2 = 1$. Atunci*

$$\int_0^{2\pi} \mathcal{R}(\cos x, \sin x)dx = 2\pi \sum_{\substack{a \in \mathcal{P}(f) \\ |a|<1}} Rez(f, a) \tag{11.17}$$

unde $f(z) = \frac{1}{z}\mathcal{R}\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right)$, suma fiind considerată în raport cu polii funcţiei f din discul unitate.

Demonstraţie. Considerăm drumul circular $\gamma(t) = e^{2\pi ti}$, $t \in [0, 1]$. Atunci avem succesiv

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \mathcal{R}(\cos x, \sin x)dx = \int_0^{2\pi} \mathcal{R}\left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right) dx \\
&= 2\pi \int_0^1 \mathcal{R}\left(\frac{e^{2\pi ti} + e^{-2\pi ti}}{2}, \frac{e^{2\pi ti} - e^{-2\pi ti}}{2i}\right) dt \\
&= \frac{1}{i} \int_0^1 e^{-2\pi ti}\mathcal{R}\left(\frac{e^{2\pi ti} + e^{-2\pi ti}}{2}, \frac{e^{2\pi ti} - e^{-2\pi ti}}{2i}\right) 2\pi i e^{2\pi ti} dt \\
&= \frac{1}{-i} \int_0^1 (f \circ \gamma)(t) \cdot \gamma'(t)dt \\
&= \frac{1}{i} \int_\gamma f(z)dz = 2\pi \sum_{\substack{a \in \mathcal{P}(f) \\ |a|<1}} Rez(f, a),
\end{aligned}$$

unde pentru ultima egalitate am aplicat teorema reziduurilor.

Observaţie. Dacă $\mathcal{R}$ este ca în propoziţia precedentă, atunci procedând analog se poate arăta

$$\int_0^{2\pi} \mathcal{R}(\cos x, \sin x) \cos mx \, dx = 2\pi \sum_{\substack{a \in \mathcal{P}(g) \\ |a|<1}} Rez(g, a) \tag{11.18}$$

şi respectiv

$$\int_0^{2\pi} \mathcal{R}(\cos x, \sin x) \sin mx \, dx = 2\pi \sum_{\substack{b \in \mathcal{P}(h) \\ |b|<1}} Rez(h, b), \tag{11.19}$$

unde m este număr natural nenul şi

$$g(z) = \frac{z^m + z^{-m}}{2z} \cdot \mathcal{R}\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i}\right),$$

$$h(z) = \frac{z^m - z^{-m}}{2iz} \cdot \mathcal{R}\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i}\right)$$

În continuare considerăm integrale Riemann improprii.

Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ o funcţie continuă. Spunem că f este *integrabilă generalizat* pe $(-\infty, \infty)$ dacă există limita

$$\lim_{\rho \to \infty} \int_{-\rho}^{0} f(x)dx + \lim_{r \to \infty} \int_0^r f(x)dx =: \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

şi acest număr se numeşte *integrala generalizată* a lui f pe $(-\infty, \infty)$. Se mai spune că integrala $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ este convergentă.

De asemenea, spunem că f este *integrabilă în sens Cauchy* pe $(-\infty, \infty)$, sau că $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ este *convergentă în sens Cauchy,* dacă există limita

$$\lim_{r \to \infty} \int_{-r}^{r} f(x)dx =: V.P. \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

Această limită se numeşte *valoarea principală în sens Cauchy* a integralei $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$.

Evident dacă f este integrabilă generalizat atunci este integrabilă în sens Cauchy şi integrala $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ coincide cu valoarea principală Cauchy a sa, însă afirmaţia reciprocă nu este adevărată în general. De exemplu, funcţia $f(x) = x \quad (x \in \mathbb{R})$ este integrabilă în sens Cauchy, dar nu este integrabilă generalizat pe $(-\infty, \infty)$.

Acum presupunem că funcţia complexă f este continuă pe intervalul real $(a, b]$ şi $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} = \infty$. Dacă există limita

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx =: \int\limits_{a}^{b} f(x)dx,$$

această limită se numeşte *integrala improprie* a lui f pe $(a, b]$. Analog se defineşte integrala improprie a lui f pe $(a, b]$.

Mai general, fie $c \in (a, b)$ şi presupunem că f este continuă pe $[a, c)$ şi pe $(c, b]$ şi că f este mărginită pe o vecinătate a lui c. Dacă există limita

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a}^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\eta\to 0}\int\limits_{c+\eta}^{b} f(x)dx =: \int\limits_{a}^{b} f(x)dx,$$

acest număr se numeşte *integrală improprie* a lui f pe $[a, b]$. Dacă există însă limita

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int\limits_{a}^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int\limits_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx\right) =: V.P.\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$$

aceasta se numeşte *valoarea principală Cauchy* a integralei improprii a lui f pe $[a, b]$. Evident, aceasta poate să existe fără ca integrala improprie să existe, dar integrala improprie dacă există, coincide cu valoarea principală Cauchy a sa.

În propoziţiile şi demonstraţiile care urmează ne referim fie la integrale generalizate, fie la integrale improprii de funcţii reale sau complexe.

Propoziţia 11.5.2. *Fie Ω o mulţime deschisă în $\mathbb{C}$ conţinând semiplanul superior $\{z \in \mathbb{C} : \ \mathrm{Im}\, z \geqq 0\}$. Fie f o funcţie meromorfă pe Ω fără poli în*

$\mathbb{R}$ *şi având un număr finit de poli în semiplanul* $\{\text{Im } z > 0\}$. *Presupunem că există* $M > 0$ *şi* $k > 1$ *încât* $|f(z)| \leqq M \cdot |z|^{-k}$ *pentru* $z \in \mathbb{C}$ *cu* $\text{Im } z > 0$ *şi* $|z|$ *suficient de mare. Atunci pentru* $\alpha \geqq 0$ *avem*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} f(x)dx = 2\pi i \sum_{\substack{a \in \mathcal{P}(g) \\ Im\ a>0}} Rez(g,a), \tag{11.20}$$

unde $g(z) = e^{i\alpha z} f(z)$, $z \in \Omega$.

Demonstraţie. Fie $r > 0$ suficient de mare, încât toţi polii din semiplanul $\{\text{Im } z > 0\}$ ai funcţiei f să aparţină discului $D(0,r)$. Considerăm drumul "semicircular" $\gamma_r(t) = re^{it}$, $t \in [0,\pi]$ şi drumul liniar $\tau_r(t) = t$, $t \in [-r,r]$ şi fie γ o reparametrizare pe $[0,1]$ a drumului $\gamma_r \cdot \tau_r$. Deoarece $\mathbb{R}$ este închisă în Ω, rezultă că $\rho := d(\mathbb{R}, \partial\Omega) > 0$. Deci γ este un drum închis parţial neted în domeniul simplu conex $\{z \in \mathbb{C} : \ \text{Im } z > -\rho/2\}$ şi γ este nul omolog în Ω. Aplicând teorema reziduurilor relativ la g şi γ obţinem

$$\int_{\gamma_r} g(z)dz + \int_{\tau_r} g(z)dz = \int_{\gamma} g(z)dz = 2\pi i \sum_{\substack{a \in \mathcal{P}(g) \\ \text{Im } a>0}} Rez(g,a).$$

Dar pentru $z \in S(\gamma_r)$ avem $\text{Im } z \geq 0$ şi deci $|e^{i\alpha z}| = e^{-\alpha \text{Im } z}$. Folosind apoi evaluarea $|f(z)| \leqq M|z|^{-k}$ $(k > 1)$ pentru $|z|$ mare şi $\text{Im } z > 0$, deducem

$$\left| \int_{\gamma_r} g(z)dz \right| \leqq \pi r \sup_{z \in S(\gamma_r)} e^{-\alpha \text{Im } z} |f(z)| \leqq \pi \frac{rM}{r^k} = \frac{\pi M}{r^{k-1}}.$$

Trecând acum la limită pentru $r \to \infty$ în stânga egalităţii dinainte rezultă

$$V.P. \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} f(x)dx = \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} g(x)dx =$$

$$= \lim_{r\to\infty} \int_{\tau_r} g(z)dz = 2\pi i \sum_{\substack{a \in \mathcal{P}(g) \\ \text{Im } a>0}} Rez(g,a).$$

însă ipoteza de mărginire asupra lui f asigură de fapt (folosind de exemplu criteriul comparaţiei) că f este integrabilă generalizat pe $(-\infty, \infty)$. Concludem că (11.20) are loc şi demonstraţia se încheie.

Adaptând demonstraţia precedentă pentru semiplanul inferior $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z \leqq 0\}$ şi considerând drumurile $\widetilde{\gamma}_r(t) = re^{it}$, $t \in [\pi, 2\pi]$ şi τ_r^{-1} ca mai jos, se poate arăta de asemenea

Propoziţia 11.5.3. *Fie Ω o mulţime deschisă în $\mathbb{C}$ conţinând semiplanul inferior $\{z : \ Im\ z \leqq 0\}$. Fie f o funcţie meromorfă pe Ω fără poli în $\mathbb{R}$ şi având un număr finit de poli în semiplanul $\{Im\ z < 0\}$. Presupunem că există $M > 0$ şi $k > 1$ încât $|f(z)| \leqq M|z|^{-k}$ pentru $z \in \mathbb{C}$ cu $Im\ z < 0$ şi $|z|$ suficient de mare. Atunci pentru $\alpha \leqq 0$ avem*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} f(x)dx = -2\pi i \sum_{\substack{b\in\mathcal{P}(g)\\ Im\ b<0}} Rez(g, b), \tag{11.21}$$

unde $g(z) = e^{i\alpha x} f(z)$, $z \in \Omega$.

Observaţie. Formulele (11.20) şi (11.21) se aplică, în particular funcţiilor raţionale $\mathcal{R} = P/Q$ (P şi Q polinoame) care nu au poli în $\mathbb{R}$, astfel încât $grad\ Q \geqq 2 + grad\ P$. în acest caz, pentru $\alpha > 0$ se obţine

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}(x)dx = 2\pi i \sum_{\substack{a\in\mathcal{P}(\mathcal{R})\\ Im\ a>0}} Rez(\mathcal{R}, a) = -2\pi i \sum_{\substack{b\in\mathcal{P}(\mathcal{R})\\ Im\ b<0}} Rez(\mathcal{R}, b). \tag{11.22}$$

Să notăm că dacă funcţia raţională $\mathcal{R}$ nu are poli în $\mathbb{R}$ şi $grad\ Q = 1 + grad\ P$, atunci $\mathcal{R}$ nu este integrabil a generalizat pe $(-\infty, \infty)$. Dar şi în acest caz $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x}\mathcal{R}(x)dx$ este convergentă pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$. Pentru a arăta aceasta, folosim binecunoscuta *inegalitate a lui Jordan,* anume

$$\frac{2t}{\pi} \leqq \sin\ t \leqq t \quad \left(t \in [0, \frac{\pi}{2}]\right). \tag{11.23}$$

Iată o demonstraţie simplă a acesteia. Dacă φ este o funcţie continuă şi descrescătoare pe un interval real $(0, \alpha)$, atunci funcţia

$$\Phi(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \varphi(s)ds \quad (t \in (0, \alpha))$$

este de asemenea descrescătoare. În adevăr din

$$\Phi(t) \geqq \frac{1}{t}\int_0^t \varphi(s)ds = \varphi(t) \quad (t \in (0, \alpha))$$

obţinem

$$\Phi'(t) = \frac{\varphi(t)}{t} - \frac{1}{t^2}\int_0^t \varphi(s)ds = \frac{1}{t}\left[\varphi(t) - \Phi(t)\right] \leqq 0$$

pentru $t \in (0, \alpha)$. Aplicând această observaţie funcţiei $\varphi(\theta) = \cos\theta$, în care caz avem $\Phi(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \cos\theta d\theta = \frac{\sin t}{t}$, pentru $t \in (0, \pi/2)$, se obţin inegalităţile (11.23).

Propoziţia 11.5.4. *Fie $\mathcal{R}$ o funcţie raţională în $\mathbb{C}$ care nu are poli în $\mathbb{R}$, astfel că $\lim\limits_{z\to\infty} \mathcal{R}(z) = 0$. Atunci pentru $\alpha > 0$ avem*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x}\mathcal{R}(x)dx = 2\pi i \sum_{\substack{a\in\mathcal{P}(g)\\ \text{Im } a>0}} Rez(g, a) \tag{11.24}$$

şi pentru $\alpha < 0$ avem

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x}\mathcal{R}(x)dx = -2\pi i \sum_{\substack{b\in\mathcal{P}(g)\\ \text{Im } b<0}} Rez(g, b), \tag{11.25}$$

unde $g(z) = e^{i\alpha z}\mathcal{R}(z)$, $z \in \mathbb{C}$.

Demonstraţie. Presupunem $\alpha > 0$. Considerăm drumurile γ_r, τ_r $(r > 0)$ şi γ ca în demonstraţia propoziţiei 11.5.2. Cum γ este închis, aplicând teorema reziduurilor funcţiei g relativ la γ obţinem

$$\int_{\gamma_r} g(z)dz + \int_{\tau_r} g(z)dz = \int_{\gamma} g(z)dz = 2\pi i \sum_{\substack{a\in\mathcal{P}(g)\\ \text{Im } a>0}} Rez(g, a).$$

Evaluând acum integrala lui g pe γ_r, folosind faptul că există $M > 0$ încât $|f(z)| \leqq M/|z|$ pentru $|z| \geqq r$ şi prima inegalitate în (11.23) obţinem

$$\left|\int\limits_{\gamma_r} g(z)dz\right| \leqq \int\limits_0^{\pi} \left|e^{i\alpha\gamma_r(t)}\mathcal{R}(\gamma_r(t))\gamma_r'(t)\right| dt \leqq$$

$$\leqq r \cdot \sup_{|z|=r} |\mathcal{R}(z)| \int\limits_0^{\pi} e^{-\alpha r \sin t} dt \leqq$$

$$\leqq r \cdot \frac{M}{r} \left(\int\limits_0^{\pi/2} e^{-\alpha r \sin t} dt + \int\limits_{\pi/2}^{\pi} e^{-\alpha r \sin(\pi + t - \pi)} dt \right)$$

$$= M \left(\int\limits_0^{\pi/2} e^{-\alpha r \sin t} dt - \int\limits_{\pi/2}^{0} e^{-\alpha r \sin(\pi - s)} ds \right)$$

$$= 2M \int\limits_0^{\pi/2} e^{-\alpha r \sin t} dt \leqq$$

$$\leqq 2M \int\limits_0^{\pi/2} e^{-\alpha r 2t/\pi} dt = \frac{M\pi}{\alpha r}(1 - e^{-\alpha r}).$$

Rezultă că $\int\limits_{\gamma_r} g(z)dz \to 0 \;\; (r \to \infty)$ şi trecând la limită în egalitatea anterioară obţinem

$$V.P. \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x}\mathcal{R}(x)dx = \lim_{r\to\infty} \int\limits_{\tau_r} g(z)dz = 2\pi i \sum_{\substack{a \in \mathcal{P}(g) \\ \operatorname{Im} a > 0}} Rez(g, a).$$

Presupunem acum $\alpha < 0$. Fie $\widetilde{\gamma_r} = re^{it}$, $t \in [\pi, 2\pi]$ şi $\widetilde{\gamma}$ o reparametrizare pe $[0, 1]$ a drumului $\widetilde{\gamma_r} \cdot \tau_r^{-1}$, unde $r > 0$ este suficient de mare încât polii funcţiei $\mathcal{R}$ din semiplanul inferior să aparţină discului $D(0, r)$. Aplicând teorema reziduurilor relativ la g şi $\widetilde{\gamma}$ avem

$$\int\limits_{\widetilde{\gamma_r}} g(z)dz + \int\limits_{\tau_r^{-1}} g(z)dz = \int\limits_{\widetilde{\gamma}} g(z)dz = 2\pi i \sum_{\substack{b \in \mathcal{P}(g) \\ \operatorname{Im} b < 0}} Rez(g, b).$$

Pentru evaluarea integralei lui g pe $\widetilde{\gamma_r}$ procedăm ca mai sus. Avem

$$\begin{aligned}\left|\int\limits_{\widetilde{\gamma_r}} g(z)dz\right| &\leqq r\cdot\sup_{|z|=r}|\mathcal{R}(z)|\int\limits_{\pi}^{2\pi} e^{-\alpha r\sin t}dt \leqq\\ &\leqq r\cdot\frac{M}{r}\left(-\int\limits_{\pi}^{0} e^{-\alpha r\sin(2\pi-s)}ds\right)\\ &= M\int\limits_{0}^{\pi} e^{\alpha r\sin t}dt\leqq\\ &\leqq 2M\int\limits_{0}^{\pi/2} e^{\alpha r2t/\pi}dt = \frac{M\pi}{\alpha r}(e^{\alpha r}-1).\end{aligned}$$

Deci $\int\limits_{\widetilde{\gamma_r}} g(z)dz \to 0 \ \ (r\to\infty)$ şi din egalitatea precedentă obţinem

$$V.P.\quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x}\mathcal{R}(x)dx = -\lim_{r\to\infty}\int\limits_{\tau_r^{-1}} g(z)dz = -2\pi i\sum_{\substack{b\in\mathcal{P}(g)\\ \operatorname{Im} b<0}} Rez(g,b).$$

Pentru a încheia demonstraţia, mai rămâne de arătat că integrala $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x}\mathcal{R}(x)dx$ este convergentă dacă $\alpha\neq 0$. Punem $\mathcal{R}=P/Q$, P şi Q fiind polinoame şi Q nu are zerouri în $\mathbb{R}$. Atunci $\mathcal{R}'=(P'Q-PQ')/Q^2$ este o funcţie raţională astfel că $grad\ Q^2 \geqq 2+\ grad\ (P'Q-PQ')$, deoarece condiţia din ipoteză pentru $\mathcal{R}$ implică $grad\ Q \geqq 1+\ grad\ P$. Deci există $C>0$ astfel că $|\mathcal{R}'(z)|\leqq C|z|^{-2}$ pentru z suficient de mare. Acum pentru $0<\rho<r<\infty$ avem

$$\begin{aligned}\int\limits_{\rho}^{r} e^{i\alpha x}\mathcal{R}(x)dx &= \frac{e^{i\alpha x}}{i\alpha}\mathcal{R}\Big|_{\rho}^{r} - \frac{1}{i\alpha}\int\limits_{\rho}^{r} e^{i\alpha x}\mathcal{R}'(x)dx\\ &= \frac{i}{\alpha}\left(e^{i\alpha\rho}\mathcal{R}(\rho) - e^{i\alpha r}\mathcal{R}(r) + \int\limits_{\rho}^{r} e^{i\alpha x}\mathcal{R}'(x)dx\right),\end{aligned}$$

de unde (pentru ρ şi r suficient de mari) obţinem

$$\left|\int_{\rho}^{r} e^{i\alpha x}\mathcal{R}(x)dx\right| \leqq \frac{1}{|\alpha|}\left[M(\frac{1}{\rho}+\frac{1}{r})+C\int_{\rho}^{r}\frac{dx}{x^2}\right]$$

$$\frac{1}{|\alpha|}\left[M(\frac{1}{\rho}+\frac{1}{r})+o(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{r})\right],$$

care tinde la zero pentru $\rho \to \infty$.

În baza criteriului lui Cauchy-Bolzano rezultă că există $\lim\limits_{r\to\infty}\int\limits_{0}^{r} e^{i\alpha x}\mathcal{R}(x)dx \in \mathbb{C}$. Analog, există $\lim\limits_{\rho\to\infty}\int\limits_{-\rho}^{0} e^{i\alpha x}\mathcal{R}(x)dx$. Prin urmare integrala $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x}\mathcal{R}(x)dx$ este convergentă şi coincide cu valoarea principală în sens Cauchy a sa. Demonstraţia se încheie.

Observaţie. Integralele generalizate considerate în propoziţiile anterioare sunt cazuri speciale de integrale Fourier. Notăm că în caz de convergenţă, este evidentă egalitatea

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x}dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\alpha x dx + i\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\alpha x dx,$$

iar dacă f este funcţie reală, atunci integralele din membrul al doilea reprezintă partea reală, respectiv partea imaginară a integralei din membrul întâi (α este real). Mai mult, dacă funcţia f este pară ($f(-x)=f(x),\ \ x\in\mathbb{R}$) atunci

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\alpha x dx = 2\int_{0}^{\infty} f(x)\cos\alpha x dx$$

şi

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\alpha x dx = 0,$$

iar dacă f este impară ($f(-x)=-f(x),\ \ x\in\mathbb{R}$) atunci avem

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\alpha x dx = 0$$

şi

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\alpha x dx = 2\int_0^{\infty} f(x)\sin\alpha x dx.$$

De exemplu, aplicând propoziţia 11.5.4 putem obţine valoarea *integralei Laplace:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{i\alpha x}}{x^2+1}dx = \begin{cases} i\pi e^{-\alpha}, & \alpha > 0 \\ -i\pi e^{\alpha}, & \alpha < 0, \end{cases}$$

de unde

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos\alpha x}{x^2+1}dx = 0$$

şi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin\alpha x}{x^2+1}dx = \begin{cases} \pi e^{-\alpha}, & \alpha > 0 \\ -\pi e^{\alpha}, & \alpha < 0. \end{cases}$$

Observaţie. Inegalitatea lui Jordan (11.23) poate fi folosită de asemenea pentru a calcula integralele lui Fresnel:

$$\int_0^{\infty} \cos x^2 dx = \int_0^{\infty} \sin x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}. \tag{11.26}$$

În acest scop, fie funcţia întreagă $f(z) = e^{iz^2}$, $z \in \mathbb{C}$. Fie $r > 0$ şi drumul $\gamma = \gamma_r^1 \cdot \gamma_r^2 \cdot \gamma_r^3$, unde $\gamma_r^1(t) = t$, $t \in [0, r]$, $\gamma_r^2(t) = re^{it}$, $t \in [0, \pi/4]$ şi $\gamma_r^3(t) = r(1+i)(1-t)/\sqrt{2}$, $t \in [0, 1]$. Atunci

$$\int_0^r e^{ix^2}dx + \int_{\gamma_r^2} e^{iz^2}dz + \int_{\gamma_r^3} e^{iz^2}dz = \int_{\gamma} e^{iz^2}dz = 0$$

Dar cu prima inegalitate din (11.23) obţinem

$$\left|\int_{\gamma_r^2} e^{iz^2}dz\right| \leqq r\int_0^{\pi/4} e^{-r^2\sin 2t}dt \leqq r\int_0^{\pi/4} e^{-4r^2t/\pi}dt$$
$$= \frac{\pi}{4r}(1-e^{-r^2}),$$

aşadar $\int\limits_{\gamma_r^2} e^{iz^2}dz \to 0$ pentru $r \to \infty$. Urmează că

$$\lim_{r\to\infty}\int\limits_0^r e^{iz^2}dx = \lim_{r\to\infty}\int\limits_{(\gamma_r^2)^{-1}} e^{iz^2}dz = \lim_{r\to\infty}\int\limits_0^1 e^{ir^2(1+i)^2t^2/2}\frac{r}{2}(1+i)dt$$

$$= \lim_{r\to\infty}\frac{1+i}{\sqrt{2}}\int\limits_0^r e^{-t^2}dt = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\int\limits_0^\infty e^{-t^2}dt = \frac{1+i}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Deci am găsit că

$$\int\limits_0^\infty \left(\cos x^2 + i\sin x^2\right)dx = \int\limits_0^\infty e^{ix^2}dx = \frac{1+i}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

şi egalând părţile reale şi cele imaginare se obţin egalităţile (11.26).

Propoziţia 11.5.5. *Fie $\mathcal{R}$ o funcţie raţională fără poli în $\mathbb{R}_+$, astfel că $\lim\limits_{z\to\infty}\mathcal{R}(z) = 0$. Atunci*

$$\int\limits_0^\infty \mathcal{R}(x)dx = -\sum_{\substack{a\in\mathcal{P}(g)\\ a\neq 0}} Rez(g,a), \tag{11.27}$$

unde $g(z) = \mathcal{R}(z)\log z$, iar funcţia log *este ramura uniformă a funcţiei logaritm în $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$ cu* $\mathrm{Im}(\log) \in [0, 2\pi)$.

Demonstraţie. Convergenţa integralei din (11.27) este asigurată de condiţia din ipoteză a lui $\mathcal{R}$.

Fie $r > 0$ suficient de mare şi $0 < \varepsilon < \delta$, ε şi δ suficient de mici, încât polii funcţiei g din $\mathbb{C}^*$ să aparţină discului $D(0,r)$, dar să nu aparţină mulţimii $\overline{D}(0,\delta) \cup \{z \in \mathbb{C} :\ \mathrm{Re}\ z \geqq 0,\ -\varepsilon \leqq \mathrm{Im}\ z \leqq \varepsilon\}$.

Considerăm drumurile $\gamma_r(t) = re^{it}$, $t \in \left[\arcsin\frac{\varepsilon}{r}, 2\pi - \arcsin\frac{\varepsilon}{r}\right]$, $\gamma_\delta(t) = \delta e^{it}$, $t \in \left[\arcsin\frac{\varepsilon}{\delta}, 2\pi - \arcsin\frac{\varepsilon}{\delta}\right]$, $\gamma_\varepsilon^1(t) = (1-t)\left(\sqrt{\delta^2-\varepsilon^2}+\varepsilon i\right) + t\left(\sqrt{r^2-\varepsilon^2}+\varepsilon i\right)$ şi $\gamma_\varepsilon^2(t) = (1-t)\left(\sqrt{\delta^2-\varepsilon^2}-\varepsilon i\right) + t\left(\sqrt{r^2-\varepsilon^2}-\varepsilon i\right)$, $t \in [0,1]$. Fie γ o reparametrizare pe $[0,1]$ a drumului $\gamma_r \cdot \left(\gamma_\varepsilon^2\right)^{-1} \cdot \left(\gamma_\delta\right)^{-1} \cdot \gamma_\varepsilon^1$. Atunci γ este omolog cu zero în domeniul simplu conex $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$ şi aplicând teorema reziduurilor funcţiei g relativ la γ obţinem

$$\int_{\gamma_r} g(z)dz - \int_{\gamma_\varepsilon^2} g(z)dz - \int_{\gamma_\delta} g(z)dz + \int_{\gamma_\varepsilon^1} g(z)dz$$
$$= \int_{\gamma} g(z)dz = 2\pi i \sum_{\substack{a\in\mathcal{P}(g)\\ a\neq 0}} Rez(g,a).$$

Evaluând integralele de mai sus, avem întâi

$$\left|\int_{\gamma_r} g(z)dz\right| \leqq 2r\pi \sup_{z\in S(\gamma_r)} |\mathcal{R}(z)\log z| \leqq 2r\pi\cdot\frac{M}{r^2}\ln r \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

Apoi deoarece $\mathcal{R}$ este continuă pe compactul $S(\gamma_\delta)$, există $\xi_\delta \in S(\gamma_\delta)$ încât $\mathcal{R}(\xi_\delta) = \sup\limits_{z\in S(\gamma_\delta)} |\mathcal{R}(z)|$ şi cum $|\xi_\delta| = \delta$ şi $\mathcal{R}$ este continuă în $z=0$, rezultă $\mathcal{R}(\xi_\delta)\to\mathcal{R}(0)$ pentru $\delta\to 0$. Astfel obţinem

$$\left|\int_{\gamma_\delta} g(z)dz\right| \leqq 2\delta\pi \sup_{z\in S(\gamma_\delta)} |\mathcal{R}(z)\log z| \leqq \pi\|\mathcal{R}(\xi_\delta)|\delta|\ln\delta| \underset{\delta\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Notăm că în baza condiţiei din ipoteza pentru $\mathcal{R}$ este asigurată convergenţa integralei $\int\limits_0^\infty \mathcal{R}(x)\ln x dx$. Mai mult, deoarece funcţia $\mathcal{R}\cdot\log$ este uniform continuă pe compactul $S(\gamma_\varepsilon^1)$, rezultă

$$\int_{\gamma_\varepsilon^1} g(z)dz = \left(\sqrt{r^2-\varepsilon^2} - \sqrt{\delta^2-\varepsilon^2}\right)\cdot$$
$$\cdot\int_0^1 g\left(t\left(\sqrt{r^2-\varepsilon^2}-\sqrt{\delta^2-\varepsilon^2}\right)+\sqrt{\delta^2-\varepsilon^2}+\varepsilon i\right)dt,$$

care, pentru ε tinzând la zero tinde la

$$(r-\delta)\int_0^1 g\left(t(r-\delta)+\delta\right)dt = \int_\delta^r \mathcal{R}(x)\ln x dx$$

şi deci

$$\lim_{\substack{\delta\to 0\\ r\to\infty}} \int_{\gamma_\varepsilon^1} g(z)dz = \lim_{\substack{\delta\to 0\\ r\to\infty}} \int_\delta^r \mathcal{R}(x)\ln x dx = \int_0^\infty \mathcal{R}(x)\ln x dx.$$

Analog se obţine (folosind faptul că $\ln(x-\varepsilon i) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \ln x + 2\pi i$)

$$\lim_{\substack{\delta\to 0\\ r\to\infty}} \int_{\gamma_\varepsilon^2} g(z)dz = \int_0^\infty \mathcal{R}(x)(\ln x + 2\pi i)dx.$$

Combinând aceste fapte cu cele de mai sus deducem în final

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \mathcal{R}(x)dx &= \frac{1}{2\pi i}\left[\int_0^\infty \mathcal{R}(x)(\ln x + 2\pi i)dx - \int_0^\infty \mathcal{R}(x)\ln x dx\right]\\ &= \frac{1}{2\pi i}\lim_{\substack{\delta\to 0\\ r\to\infty}}\left[\int_{\gamma_\varepsilon^2} g(z)dz - \int_{\gamma_\varepsilon^1} g(z)dz\right]\\ &= -\sum_{\substack{a\in\mathcal{P}(g)\\ a\neq 0}} Rez(g,a).\end{aligned}$$

Demonstraţia se încheie.

Observaţie. Calculul integralelor de forma

$$\int_a^\infty \mathcal{R}(x)dx, \quad \int_{-\infty}^a \mathcal{R}(x)dx \quad \text{şi} \quad \int_a^b \mathcal{R}(x)dx$$

unde $a, b \in \mathbb{R}$ ($a < b$), iar $\mathcal{R}$ este o funcţie raţională fără poli pe intervalul $[a,\infty)$, $(-\infty, a]$, $[a, b]$ respectiv şi $\mathcal{R}$ verifică condiţia din ipoteza propoziţiei 11.5.5, se reduce la calculul integralelor de tipul (11.27) făcând schimbările de variabilă date de funcţiile omografice $x = t + a$, $x = (at-1)t$ şi $x = (bt+a)(t+1)^{-1}$ respectiv. Astfel metoda precedentă poate fi folosită pentru a calcula integralele (Riemann) proprii sau improprii de funcţii raţionale.

Observaţie. Pentru calculul integralelor $\int_0^\infty \mathcal{R}(x)\ln x dx$, unde $\mathcal{R}$ este o funcţie raţională ca în propoziţia 11.5.5 se poate aplica aceeaşi metodă ca în demonstraţia acestei propoziţii. Convergenţa integralei este asigurată de condiţia din ipoteză asupra lui $\mathcal{R}$. Se alege funcţia $g(z) = \mathcal{R}(z)\log^2 z$ şi considerând drumul γ corespunzător, print-un raţionament similar se obţine

$$\int_0^\infty \mathcal{R}(x)(\ln x)^2 dx - \int_0^\infty \mathcal{R}(x)(\ln x + 2\pi i)^2 dx$$
$$= 2\pi i \sum_{\substack{a\in\mathcal{P}(g)\\ a\neq 0}} Rez(g,a).$$

Separând apoi partea reală şi cea imaginară, deducem

$$\int_0^\infty \mathcal{R}(x)\ln x dx = -\frac{1}{2}\mathrm{Re}\sum_{\substack{a\in\mathcal{P}(g)\\ a\neq 0}} Rez(g,a), \tag{11.28}$$

$$\int_0^\infty \mathcal{R}(x) dx = -\frac{1}{2\pi}\mathrm{Im}\sum_{\substack{a\in\mathcal{P}(g)\\ a\neq 0}} Rez(g,a). \tag{11.29}$$

Propoziţia 11.5.6. *Fie $\mathcal{R}$ o funcţie raţională fără poli în $\mathbb{R}_+$ astfel că $\lim\limits_{z\to\infty} \mathcal{R}(z) = 0$. Atunci pentru $\alpha \in (0,1)$ avem*

$$\int_0^\infty \frac{\mathcal{R}(x)}{x^\alpha} dx = \frac{\pi e^{\alpha\pi i}}{\sin \alpha\pi}\sum_{\substack{a\in\mathcal{P}(g)\\ a\neq 0}} Rez(g,a) \tag{11.30}$$

unde $g(z) = \mathcal{R}(z)\cdot e^{-\alpha\log z}$, iar log *este ramura uniformă a funcţiei logaritm în $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$ cu $\mathrm{Im}(\log) \in [0, 2\pi)$.*

Demonstraţie. Condiţia din ipoteză asupra lui $\mathcal{R}$ asigură convergenţa integralei (11.30). În continuare aplicăm raţionamentul din demonstraţia propoziţiei 11.5.5 pentru funcţia $g(z) = \mathcal{R}(z)e^{-\alpha\log z}$, $z \neq 0$. Continuând aceleaşi drumuri pentru conturul de integrat şi aplicând teorema reziduurilor obţinem

$$\int_{\gamma_r} g(z)dz - \int_{\gamma_\varepsilon^2} g(z)dz - \int_{\gamma_\delta} g(z)dz + \int_{\gamma_\varepsilon^1} g(z)dz$$
$$= 2\pi i \sum_{\substack{a\in\mathcal{P}(g)\\ a\neq 0}} Rez(g,a).$$

Deoarece există $M > 0$ încât $|\mathcal{R}(z)| \leqq M|z|^{-1}$ pentru $|z| \to \infty$, avem

$$\left|\int\limits_{\gamma_r} g(z)dz\right| \leqq 2r\pi \sup_{z\in S(\gamma_r)} |\mathcal{R}(z)e^{-\alpha \log z}| \leqq 2\pi M \cdot r^{-\alpha} \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

şi de asemenea

$$\left|\int\limits_{\gamma_\delta} g(z)dz\right| \leqq \delta\pi \sup_{z\in S(\gamma_\delta)} |\mathcal{R}(z)e^{-\alpha \log z}|$$
$$\leqq \pi \sup_{z\in S(\gamma_\delta)} |\mathcal{R}(z)| \cdot \delta^{1-\alpha} \underset{\delta\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Pe de altă parte obţinem

$$\lim_{\substack{\delta\to 0\\ r\to\infty}} \int\limits_{\gamma_\varepsilon^1} g(z)dz = \int\limits_0^\infty \mathcal{R}(x)e^{-\alpha \ln x}dx = \int\limits_0^\infty \mathcal{R}(x)x^{-\alpha}dx,$$

$$\lim_{\substack{\delta\to 0\\ r\to\infty}} \int\limits_{\gamma_\varepsilon^2} g(z)dz = \int\limits_0^\infty \mathcal{R}(x)e^{-\alpha(\ln x + 2\pi i)}dx$$
$$= e^{-2\alpha\pi i}\int\limits_0^\infty \mathcal{R}(x)x^{-\alpha}dx.$$

Astfel concludem că

$$\int\limits_0^\infty \mathcal{R}(x)x^{-\alpha}dx = \frac{2\pi i}{1-e^{-2\alpha\pi i}} \sum_{\substack{a\in\mathcal{P}(g)\\ a\neq 0}} Rez(g,a)$$
$$= \frac{\pi e^{\alpha\pi}}{\sin\alpha\pi} \sum_{\substack{a\in\mathcal{P}(g)\\ a\neq 0}} Rez(g,a)$$

şi demonstraţis se încheie.

Propoziţia 11.5.7. *Fie $\mathcal{R}$ o funcţie raţională fără poli pe semiaxa pozitivă $(0,\infty)$, având cem mult un pol simplu în $z = 0$ şi astfel că $\lim_{z\to\infty} z\mathcal{R}(z) = 0$.*

Atunci pentru $\alpha \in (0,1)$ *avem*

$$\int_0^\infty x^\alpha \mathcal{R}(x)dx = \frac{2\pi i}{1-e^{2\alpha\pi i}} \sum_{\substack{a\in\mathcal{P}(g)\\ a\neq 0}} Rez(g,a) \tag{11.31}$$

unde $g(z) = \mathcal{R}(z)e^{\alpha \log z}$, *iar funcţia* log *este ramura uniformă a funcţiei logaritm în* $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$ *cu* $Im(\log) \in [0, 2\pi)$.

Demonstraţie. Procedăm tot ca în demonstraţia propoziţiei 11.5.5. Considerând aceleaşi drumuri şi folosind aceleaşi notaţii avem pentru r suficient de mare şi δ suficient de mic,

$$\int_\gamma \mathcal{R}(x)e^{\alpha \log z}dz = 2\pi i \sum_{\substack{a\in\mathcal{P}(g)\\ a\neq 0}} Rez(g,a),$$

unde $\gamma = \gamma_r \cdot \left(\gamma_\varepsilon^2\right)^{-1} \cdot \left(\gamma_\delta\right)^{-1} \cdot \gamma_\varepsilon^1$. Dar $\left|e^{\alpha\log z}\right| = e^{\alpha Re \log z} = e^{\alpha \ln|z|} = |z|^\alpha$. Mai mult, deoarece $\mathcal{R}$ are cel mult un pol de ordinul 1 în $z = 0$, există $C > 0$ astfel că $|R(z)| \leqq C/|z|$ pe o vecinătate redusă a lui 0. Prin urmare rezultă

$$\left|\int_{\gamma_\delta} g(z)dz\right| \leqq 2\delta\pi \cdot \delta^\alpha C/\delta = 2\pi\delta^\alpha \underset{\delta\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Pe de altă parte, există $M > 0$ astfel că $|\mathcal{R}(z)| \leqq M/|z|^2$ pentru $|z| \geqq r$ şi deci

$$\left|\int_{\gamma_r} g(z)dz\right| \leqq 2r\pi \cdot r^\alpha \cdot M/r^2 = 2\pi M/r^{1-\alpha} \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

în final, pentru δ şi r fixaţi avem

$$\int_{\gamma_\varepsilon^1} g(z)dz - \int_{\gamma_\varepsilon^2} g(z)dz \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \left(1-e^{2\pi\alpha i}\right)\int_\delta \mathcal{R}(x)e^{\alpha\ln x}dx$$

şi concludem că

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x^\alpha\mathcal{R}(x)dx &= \frac{1}{1-e^{2\alpha\pi i}} \lim_{\substack{\delta\to 0\\ r\to\infty}} \int_\gamma \mathcal{R}(z)e^{\alpha\log z}dz\\ &= \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi\alpha i}} \sum_{\substack{a\in\mathcal{P}(g)\\ a\neq 0}} Rez(g,a).\end{aligned}$$

Demonstraţia se încheie.

Acum vom considera cazul în care funcţia de integrat are un număr finit de poli pe axa reală. Demonstrăm întâi

Lema 11.5.8. *Fie $\alpha, \beta \in [0, \pi]$ cu $\alpha < \beta$ şi $\varepsilon > 0$. Fie S sectorul circular $\{z \in \mathbb{C} : \ |z| \leqq \varepsilon, \ \alpha \leqq \arg z \leqq \beta\}$, şi drumul $\gamma_\varepsilon(t) = \varepsilon e^{it}$, $t \in [\alpha, \beta]$. Dacă f este o funcţie olomorfă pe o vecinătate deschisă a lui S şi $z = 0$ este un pol simplu pentru f, atunci*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz = i\,(\beta - \alpha)\,Rez\ (f, 0). \tag{11.32}$$

Demonstraţie. Din dezvoltarea în serie Laurent a lui f în punctul $z = 0$ deducem că există o funcţie olomorfă g pe o deschisă U conţinând pe S, astfel că $g(0) = 0$ şi $zf(z) = \lambda + g(z)$ pentru $z \in U$, unde $\lambda = Rez\ (f, 0)$. Atunci avem

$$\begin{aligned}\int\limits_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz &= \int\limits_{\gamma_\varepsilon} \frac{\lambda}{z} dz + \int\limits_{\gamma_\varepsilon} \frac{g(z)}{z} dz \\ &= (\beta - \alpha)\lambda i + i \int\limits_{\alpha}^{\beta} g(\varepsilon e^{it})dt.\end{aligned}$$

Deoarece $g(\varepsilon e^{it}) \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} g(0) = 0$ uniform pentru $t \in [\alpha, \beta]$, trecând la limită în această egalitate pentru $\varepsilon \to 0$, obţinem (11.32).

Să notăm că lema rămâne valabilă (cu modificările corespunzătoare) dacă se face translaţie a originii într-un alt punct (arbitrar) din $\mathbb{R}$.

Acum putem arăta

Propoziţia 11.5.9. *Fie f o funcţie meromorfă pe $\mathbb{C}$ care are un număr finit de poli în $\{z \in \mathbb{C} : \ \mathrm{Im}\ z > 0\}$ şi un număr finit de poli simplii în $\mathbb{R}$. Presupunem că există $M > 0$ astfel că $|f(z)| \leqq M/|z|$ pentru $|z|$ suficient de mare. Atunci pentru $\alpha > 0$ avem*

$$V.P. \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} f(x)dx = 2\pi i \sum_{\substack{a \in \mathcal{P}(f) \\ \mathrm{Im}\ a > 0}} Rez(g, a) + \pi i \sum_{\substack{b \in \mathcal{P}(f) \\ b \in \mathbb{R}}} Rez(g, b), \tag{11.33}$$

unde $g(z) = e^{i\alpha z} f(z)$.

Demonstraţie. Fie $r > 0$ suficient de mare încât toţi polii lui f din semiplanul superior $\{z \in \mathbb{C} :\ \text{Im } z \geqq 0\}$ să fie în discul $D(0,r)$ şi $|f(z)| \leqq M/|z|$ pentru $|z| \geqq r$. Fie $b_1 < b_2 < \ldots < b_n$ polii lui f din $\mathbb{R}$. Pentru $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ fie $\varepsilon_k > 0$, $\varepsilon_k < r$, astfel că $D(b_k, \varepsilon_k)$ conţine doar polul b_k (al lui f) din semiplanul $\{Im\ z \geqq 0\}$ şi $D(b_k, \varepsilon_k) \cap D(b_j, \varepsilon_j) = \emptyset$ pentru $k \neq j$ şi $\partial D(o, r) \cap \partial D(b_1, \varepsilon_1) = \emptyset$, $\partial D(0, r) \cap \partial D(b_n, \varepsilon_n) = \emptyset$. Considerăm drumurile semicirculare $\gamma_r(t) = re^{it}$, $\gamma_{\varepsilon_k}(t) = \varepsilon_k e^{it}$ $(1 \leqq k \leqq n)$ pentru $t \in [0, \pi]$ şi drumurile liniare $\tau_{r,\varepsilon_1} = [-r, b_1 - \varepsilon_1]$, $\tau_{\varepsilon_k, \varepsilon_{k+1}} = [b_k + \varepsilon_k, b_{k+1} - \varepsilon_{k+1}]$ $(1 \leqq k \leqq n-1)$ şi $\tau_{\varepsilon_n, r} = [b_n + \varepsilon_n, r]$. Atunci $\gamma = \gamma_r \cdot \gamma_{r,\varepsilon_1} \cdot \gamma_{\varepsilon_1}^{-1} \cdot \tau_{\varepsilon_1,\varepsilon_2} \cdot \gamma_{\varepsilon_2}^{-1} \ldots \gamma_{\varepsilon_n}^{-1} \cdot \tau_{\varepsilon_n, r}$ este un drum nul omotop în $\mathbb{C}$. Aplicând teorema reziduurilor funcţiei f relativ la γ obţinem

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\gamma_r} g(z)dz + \int\limits_{\tau_{r,\varepsilon_1}} g(z)dz - \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\gamma_{\varepsilon_k}} g(z)dz + \\
&+ \sum_{k=1}^{n-1} \int\limits_{\tau_{\varepsilon_k,\varepsilon_{k+1}}} g(z)dz + \int\limits_{\tau_{\varepsilon_n,r}} g(z)dz \\
&= \int\limits_{\gamma} g(z)dz = 2\pi i \sum_{\substack{a \in \mathcal{P}(f) \\ \text{Im } a > 0}} Rez(g, a).
\end{aligned}$$

însă folosind majorarea $|f(z)| \leqq M/r$ pentru $|z| \geqq r$ şi inegalitatea lui Jordan, găsim că $\int \gamma_r g(z)dz \to 0$ pentru $r \to \infty$. De asemenea cu lema 11.5.8 obţinem

$$\sum_{k=1}^{n} \lim_{\varepsilon_k \to 0} \int\limits_{\gamma_{\varepsilon_k}} g(z)dz = \pi i \sum_{k=1}^{n} Rez(g, b_k)$$

şi pe de altă parte

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int\limits_{\tau_{r,\varepsilon_1}} g(z)dz + \sum_{k=1}^{n-1} \lim_{\varepsilon_k \to 0} \int\limits_{\tau_{\varepsilon_k,\varepsilon_{k+1}}} g(z)dz + \\
&\lim_{\varepsilon_n \to 0} \int\limits_{\tau_{\varepsilon_n,r}} g(z)dz = \int\limits_{-r}^{r} g(x)dx.
\end{aligned}$$

Prin urmare, trecând la limită pentru $r \to \infty$ în egalitatea de mai sus obţinem (11.33). Demonstraţia se încheie.

Observaţie. Ca aplicaţie a propoziţiei 11.5.9 se obţine

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} = \pi i,$$

de unde

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi, \quad \int_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Ultima integrală este adesea asociată cu numele lui Poisson, Laplace, sau Dirichlet, dar ea a fost calculată întâi de Euler, împreună cu integralele

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx = \int_{0}^{\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

într-o formă echivalentă, acestea din urmă sunt chiar integralele lui Fresnel.

11.6 Aplicaţii ale teoremei reziduurilor la calculul unor sume

Teorema reziduurilor are de asemena multe aplicaţii în teoria numerelor, în special în calculul unor sume de serii. Vom prezenta în continuare câteva asemena aplicaţii.

Propoziţia 11.6.1. *Fie f o funcţie meromorfă pe $\mathbb{C}$ având un număr finit de poli, astfel că $\lim\limits_{|z|\to\infty} zf(z) = 0$. Atunci*

$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\notin \mathcal{P}(f)}}^{\infty} f(n) = -\sum_{a\in\mathcal{P}(f)} Rez(g,a) \tag{11.34}$$

unde $g(z) = \pi f(z) \cot \pi z$ pentru $z \in \mathbb{C}$, $z \notin \mathbb{Z} \cup \mathcal{P}(f)$.

Demonstraţie. Mai întâi notăm că funcţia $\pi \cot \pi z = \pi \cos \pi z / \sin \pi z$ are un pol simplu în fiecare număr întreg n, deoarece $\sin \pi z$ are un zerou simplu în n şi avem

$$Rez(\pi \cot \pi z, n) = \lim_{z\to n} (z-n) \frac{\pi \cos \pi z}{\sin \pi z} = \frac{\pi \cos n\pi}{\pi \cos \pi z} = 1.$$

Fie N un număr natural suficient de mare, încât polii funcţiei f să fie conţinuţi în pătratul R_N cu vârfurile $\pm(N+1/2)\pm(N+1/2)i$. Notăm cu γ_N drumul (dreptunghiular) ∂R_N.

Aplicând teorema reziduurilor funcţiei g relativ la γ_N găsim

$$\int_{\gamma_N} g(z)dz = 2\pi i \left[\sum_{\substack{n=-N \\ n\notin \mathcal{P}(f)}}^{N} f(n) + \sum_{a\in\mathcal{P}(f)} Rez(g,a) \right].$$

Acum vom arăta că membrul stâng al acestei egalităţi tinde către zero pentru $N\to\infty$. Pentru aceasta arătăm că $|\cot\pi z| < 2$ pentru $z\in\partial R_N$ (frontiera lui R_N). Astfel, dacă $\operatorname{Re} z = N+1/2$ şi $\operatorname{Im} z = y$, atunci

$$\cot\pi z = i\frac{e^{2\pi i z}+1}{e^{2\pi i z}-1} = i\frac{e^{\pi i-2\pi y}+1}{e^{\pi i-2\pi y}-1}.$$

de unde avem

$$|\cot\pi z| = \frac{1-e^{-2\pi y}}{1+e^{2\pi y}} < 1.$$

Analog, dacă $\operatorname{Re} z = x$ şi $\operatorname{Im} z = y = N+1/2$ obţinem

$$|\cot\pi z| \leqq \frac{1+e^{-\pi(2N+1)}}{1-e^{-\pi(2N+1)}} < 2$$

(deoarece fracţia este maximă pentru $N=0$). întrucât funcţia cot este impară, rezultă că ea se majorează la fel şi pe celelalte două laturi ale pătratului R_N. Apoi cum $L(\gamma_N) = 8N+4$, deducem

$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma_N} g(z)dz\right| &\leqq (8N+4)\sup_{z\in\partial R_N}|\pi f(z)\cot\pi z| < 8\pi(2N+1)\sup_{z\in\partial R_N}|f(z)| \\ &= 8\pi(2N+1)|f(z_N)| = \frac{8\pi(2N+1)}{|z_N|}|z_N f(z_N)| \\ &\leqq \frac{16\pi(2N+1)}{2N+1}|z_N f(z_N| \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0,\end{aligned}$$

unde $z_N\in\partial R_N$ astfel că $|f(z_N| = \sup_{\partial R_N}|f|$ şi deci $|z_N| \geqq N+1/2$. Prin urmare, făcând $N\to\infty$ în egalitatea care dă integrala lui g pe γ_N, obţinem formula (11.34).

Propoziţia 11.6.2._Fie f o funcţie meromorfă pe $\mathbb{C}$ având un număr finit de poli, astfel că $\lim_{|z|\to\infty} zf(z) = 0$. Atunci_

$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq \mathcal{P}(f)}}^{\infty} (-1)^n f(n) = -\sum_{a\in\mathcal{P}(f)} Rez(g,a), \tag{11.35}$$

unde $g(z) = \pi f(z)\sin\pi z$ pentru $z \in \mathbb{C}$, $z \notin \mathbb{Z}\cup\mathcal{P}(f)$.

Demonstraţie. Funcţia $\pi\csc\pi z = \pi/\sin\pi z$ are un pol simplu în fiecare număr întreg n şi avem

$$Rez(\pi\csc\pi z, n) = \frac{1}{\cos n\pi} = (-1)^n.$$

în continuare procedăm ca în demonstraţia anterioară. Considerăm acelaşi pătrat R_N şi acelaşi drum γ_N. Deoarece avem

$$\csc^2\pi z = 1 + \cot^2\pi z,$$

rezultă că funcţia $\csc\pi z$ este mărginită pe ∂R_N. Folosind aceasta şi condiţia din ipoteză pentru f deducem ca mai înainte că

$$\lim_{N\to\infty}\int_{\gamma_N} g(z)dz = 0$$

şi aplicând teorema reziduurilor obţinem formula (11.35).

Observaţie. În acest context putem viza şi calculul unor sume în care intervin coeficienţii binomiali C_n^k =coeficientul lui z^k în polinomul $(1+z)^n$, $n,k\in\mathbb{N}$, $k\leq n$. întâi notăm că prin teorema reziduurilor (sau formula generală integrală Cauchy) avem

$$C_n^k = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{(1+z)^n}{z^{k+}}dz, \tag{11.36}$$

unde γ este un drum (simplu) închis parţial neted care înconjoară originea. În particular, din (11.36) rezultă

$$C_{2n}^n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{(1+z)^{2n}}{z^{n+1}}dz$$

şi luând $\gamma_0 = \partial D(0,1)$ obţinem evaluarea $C_{2n}^n \leqq 4^n$.

De exemplu, pentru a calcula suma $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2$, putem considera pe C_n^k fie coeficientul lui z^k în $(1+z)^n$, fie coeficientul lui z^{-k} în $(1+1/z)^n$. Deci S_n este termenul constant în $(1+z)^n(1+1/z)^n$. Astfel avem

$$\sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_0} \frac{1}{z}(1+z)^n \left(1+\frac{1}{z}\right)^n dz$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_0} \frac{(1+z)^{2n}}{z^{n+1}} dz = C_{2n}^n.$$

Observaţie. Metoda de mai sus poate fi folosită şi pentru a arăta că anumite funcţii sunt mărginite. De exemplu, să considerăm funcţia Bessel

$$B(x) = 1 - \frac{x}{(1!)^2} + \frac{x^2}{(2!)^2} - \frac{x^3}{(3!)^2} + \dots \quad (x \geq 0).$$

Deoarece $1/n!$ este coeficientul lui z^n din dezvoltarea (în serie a) lui e^z, iar $(-x)^n/n!$ este coeficientul lui z^{-n} din dezvoltarea lui $e^{-x/z}$ rezultă (prin teorema reziduurilor) că

$$B(x) = Rez\left(\frac{e^z - e^{-x/z}}{z}, 0\right) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_0} \frac{e^{x-x/z}}{z} dz$$

unde γ_0 este un drum circular centrat în origine.
Luând $\gamma_0 = \partial D(0, \sqrt{x})$ obţinem

$$B(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} e^{2i\sqrt{x}\sin t} dt$$

şi prin urmare $|B(x)| \leqq 1$ pentru orice $x \geqq 0$.

În încheiere demonstrăm

Teorema 11.6.3.(Gauss) *Pentru orice număr întreg $n \geq 1$ avem*

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{2\pi k^2 i/n} = \sqrt{n}\frac{i + i^{1-n}}{i+1}. \tag{11.37}$$

Demonstraţie. (Kroneker). Fie $r > 0$ suficient de mare şi $\varepsilon > 0$ suficient de mic. Considerăm drumurile "semicirculare" $\gamma_\varepsilon(t) = \varepsilon e^{it}$, $t \in [-\pi/2, \pi/2]$ şi

$\gamma_{\varepsilon,n}(t) = \frac{1}{2}n + \varepsilon e^{it}$, $t \in [\pi/2, 3\pi/2]$. Punem $v_1 = \frac{1}{2}n - ir$, $v_2 = \frac{1}{2}n + ir$, $v_3 = ir$, $v_4 = -ir$ şi considerăm drumurile liniare $\gamma_1 = [v_1, \frac{1}{2}n - i\varepsilon]$, $\gamma_2 = [\frac{1}{2}n + i\varepsilon, v_2]$, $\gamma_3 = [v_2, v_3]$, $\gamma_4 = [v_3, i\varepsilon]$, $\gamma_5 = [-i\varepsilon, v_4]$, $\gamma_6 = [v_4, v_1]$. Fie $\gamma = \gamma_1 \cdot \gamma_{\varepsilon,n}^{-1} \cdot \gamma_2 \cdot \gamma_3 \cdot \gamma_4 \cdot \gamma_\varepsilon^{-1} \cdot \gamma_5 \cdot \gamma_6$.

Prin teorema reziduurilor avem

$$\int_\gamma \frac{e^{2\pi i z^2/n}}{e^{2\pi i z} - 1} = \sum_{0<k<\frac{n}{2}} e^{2\pi i k^2/n}.$$

Cum funcţia $(e^{2\pi i z} - 1)^{-1}$ are în $z = 0$ pol simplu avem

$$\begin{aligned} f(z) := \frac{e^{2\pi i z^2/n}}{e^{2\pi i z} - 1} &= e^{2\pi i z^2/n} \frac{1}{2\pi i z}(1 + c_0 z + c_1 z^2 + \dots) \\ &= \frac{1}{2\pi i z}(1 + z \cdot g(z)), \end{aligned}$$

unde g este o funcţie olomorfă pe o vecinătate a lui 0. Deoarece $\int\limits_{\gamma_\varepsilon} g(z)dz \to 0$ $(\varepsilon \to 0)$ şi $\int\limits_{\gamma_\varepsilon} \frac{dz}{z} = \pi i$, rezultă că

$$\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$

Analog obţinem

$$\int_{\gamma_{\varepsilon,n}} f(z)dz = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{2\pi i\left(\frac{1}{2}n\right)^2/n}, & n - \text{par} \\ 0, & n - \text{impar}. \end{cases}$$

Apoi cum $\sum\limits_{0<k<n/2} e^{2\pi i k^2/n} = \frac{1}{2} \sum\limits_{\substack{0<k<n \\ k\neq n/2}} e^{2\pi i k^2/n}$, deducem că

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} e^{2\pi i k^2/n} = \lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{j=1}^{6} \int_{\gamma_j} f(z)dz.$$

Dacă $z = x + ir$, $0 \leqq x \leqq n/2$, avem

$$|f(z)| = \left| \frac{e^{2\pi i z^2/n}}{e^{2\pi i z} - 1} \right| \leqq \frac{e^{-4\pi x r/n}}{1 - e^{-2\pi r}} \leqq 2$$

şi $f(x+ir) \to 0$ pentru $r \to \infty$, dacă $x > 0$. de asemenea, dacă $z = x - ir$, $0 \leqq x \leqq n/2$, avem

$$|f(z)| \leqq \frac{e^{4\pi xr/n}}{e^{2\pi r} - 1} \leqq 2$$

şi $f(x - ir) \to 0$ pentru $r \to \infty$, dacă $x < n/2$. Astfel

$$\int\limits_{\gamma_3} f(z)dz \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \int\limits_{\gamma_6} f(z)dz \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Acum,

$$\int\limits_{\gamma_4} f(z)dz + \int\limits_{\gamma_5} f(z)dz =$$

$$= -i\int\limits_{\varepsilon}^{r} e^{-2\pi iy^2/n}\left(\frac{1}{e^{-2\pi y} - 1} + \frac{1}{e^{2\pi y} - 1}\right) dy.$$

Deoarece

$$\frac{1}{e^{-2\pi y} - 1} + \frac{1}{e^{2\pi y} + 1} = \frac{1}{e^{-2\pi y} - 1} + \frac{e^{-2\pi y}}{1 - e^{-2\pi y}} = -1,$$

rezultă

$$\int\limits_{\gamma_4} f(z)dz + \int\limits_{\gamma_5} f(z)dz = i\int\limits_{\varepsilon}^{r} e^{-2\pi iy^2/n}dy.$$

Pe de altă parte

$$\int\limits_{\gamma_1} f(z)dz + \int\limits_{\gamma_2} f(z)dz = i\int\limits_{\varepsilon}^{r} e^{-2\pi iy^2/n}h(y)dy,$$

unde

$$h(y) = \frac{e^{-2\pi y + (\pi in/2)}}{e^{-2\pi y + \pi in} - 1} + \frac{e^{2\pi y + (\pi in/2)}}{e^{2\pi y + \pi in} - 1}.$$

Dar

$$\frac{e^{2\pi y + (\pi in/2)}}{e^{2\pi y - \pi in} - 1} = \frac{e^{\pi in/2}}{e^{\pi in} - e^{-2\pi y}} = \frac{e^{-\pi in/2}}{1 - e^{-2\pi y - \pi in}}$$

şi deci

$$h(y) = \frac{e^{-\pi in/2}}{e^{-2\pi y + \pi in} - 1}\left(e^{-2\pi y + \pi in} - 1\right) = e^{-\pi in/2} = i^{-n}.$$

Folosind aceste fapte şi făcând $\varepsilon \to 0$, $r \to \infty$ obţinem

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} e^{2\pi k^2 i/n} = (i + i^{1-n}) \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ r\to\infty}} \int\limits_{\varepsilon}^{r} e^{-2\pi i y^2/n} dy$$

$$= \sqrt{n}\left(i + i^{1-n}\right) \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ r\to\infty}} \int\limits_{\varepsilon}^{r} e^{-2\pi i y^2} dy = \sqrt{n}\left(i + i^{1-n}\right) \int\limits_{0}^{\infty} e^{-2\pi i y^2} dy.$$

Dar pentru $n = 1$ avem

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{-2\pi i k^2/n} = e^0 = 1$$

şi din egalitatea de mai sus obţinem

$$\int\limits_{0}^{\infty} e^{-2\pi i y^2} dy = \frac{1}{2(i+1)}.$$

în concluzie, tot din egalitatea anterioară rezultă

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{2\pi i k^2/n} = \sqrt{n}\frac{i + i^{1-n}}{i+1}.$$

Capitolul 12

Probleme propuse

Exerciţiul 1. Fie $a = re^{i\theta} \neq 0$ şi γ un drum închis parţial neted în $\mathbb{C}^*$, cu punctul iniţial 1 şi punctul final a. Arătaţi că există $n \in \mathbb{Z}$ astfel ca $\int\limits_\gamma \frac{dz}{z} = \log r + i(\theta + 2n\pi)$.

Exerciţiul 2. Arătaţi că dacă polinoamele lui Legendre

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \left[(z^2-1)^n\right]^{(n)}$$

admit reprezentarea integrală

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{(w^2-1)^n}{2^n(w-z)^{n+1}} dz$$

unde γ este un drum simplu închis parţial neted în $\mathbb{C}$, iar z nu este în componenta conexă nemărginită a lui $\mathbb{C} \setminus S(\gamma)$.

Exerciţiul 3. Fie f o funcţie olomorfă pe o vecinătate a discului unitate închis. Arătaţi că

$$\int\limits_{-1}^{1} |f(x)|^2 dx \leq \frac{1}{2} \int\limits_0^{2\pi} \left|f(e^{it})\right|^2 dt.$$

Indicaţie. Se arată întâi inegalitatea în cazul că $f(x)$ este real pentru orice $x \in [-1,1]$. Pentru aceasta, se aplică teorema lui Cauchy pentru frontiera semidiscului unitate superior, respectiv cel inferior şi se obţine respectiv

$$\int\limits_{-1}^{1} |f(x)|^2 dx \leq \int\limits_0^{\pi} \left|f(e^{it})\right|^2 dt, \quad \int\limits_{-1}^{1} |f(x)|^2 dx \leq \int\limits_{\pi}^{2\pi} \left|f(e^{it})\right|^2 dt.$$

Exercițiul 4. Dacă $P(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k$ este un polinom în $\mathbb{C}$ arătați că

$$\int_0^1 |P(x)|^2 dx = \sum_{j,k=0}^{n} \frac{a_j \bar{a}_k}{j+k+1}.$$

Exercițiul 5. Calculați $\int\limits_{\gamma} \left(\frac{z}{z-1}\right)^n dz$, unde $\gamma(t) = 1 + e^{it}$ pentru $t \in [0, 2\pi]$ și $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$.

Exercițiul 6. Fie γ un drum simplu închis parțial neted în $\mathbb{C}$, astfel că $n(\gamma, a)$ este 0 și 1 pentru orice $a \notin S(\gamma)$. Fie f o funcție întreagă încât $Z(f) \cap S(\gamma) = \emptyset$. Arătați că pentru orice $m \geq 1$ natural are loc egalitatea

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} z^m \frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{\substack{a_k \in Z(f) \\ n(\gamma, a_k) = 1}} a_k^m.$$

Exercițiul 7. Fie p un polinom de grad n și $r > 0$ astfel că p nu are rădăcini în mulțimea $\{z : \ |z| > r\}$. Arătați că

$$\int_{\partial D(0,r)} \frac{p'(z)}{p(z)} dz = 2n\pi i.$$

Exercițiul 8. Folosind principiul argumentului și teorema lui Morera, arătați că funcția $\sqrt{z^2-1} = exp\left(\frac{1}{2}\log(z^2-1)\right)$ este olomorfă pe $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

Exercițiul 9. Fie m și n numere naturale. Arătați că

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(0,1)} \frac{(z^2-1)^m}{z^{m+n+1}} dz = \begin{cases} (\pm 1)^k C_{n+2k}^k, & m = n + 2k, \ k \geq 0 \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases}$$

Exercițiul 10. Fie f o funcție întreagă, $r > 0$ și $a, b \in D(0, r)$. Calculați integrala

$$\int_{\partial D(0,1)} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz$$

și folosiți aceasta pentru a demonstra teorema lui Liouville.

Exerciţiul 11. Dacă $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ pentru $|z| < r$ şi $g(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ pentru $|z| < \rho$, arătaţi că

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D(0,r)} \frac{f(w)}{w} g\left(\frac{z}{w}\right) dw \quad (|z| < r\rho).$$

Exerciţiul 12. Fie f o funcţie olomorfă pe o vecinătate a discului unitate închis $\overline{\mathbb{D}}$.

a) Arătaţi că

$$\left(1 - |z|^2\right) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial \mathbb{D}} f(w) \frac{1 - \bar{z}w}{w - z} dw \quad (|z| < 1).$$

b) Deduceţi din *(a)* că

$$\left(1 - |z|^2\right) |f(z)| \leqq \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left|f(e^{it})\right| dt.$$

Exerciţiul 13. Arătaţi că ecuaţia $ze^{\alpha - z} = 1$, unde $\alpha > 1$, are o unică soluţie în discul $\overline{\mathbb{D}}$ şi această soluţie este pozitivă.

Exerciţiul 14. Arătaţi că ecuaţia $z + e^{-z} = \alpha$, unde $\alpha > 1$, are o unică soluţie z_α în semiplanul drept $\{z : \ \mathrm{Re}\ z \geqq 0\}$ şi această soluţie este reală. Calculaţi $\lim\limits_{\alpha \to 1} z_\alpha$.

Exerciţiul 15. Determinaţi numărul rădăcinilor ecuaţiei $z^4 - 9z + 1 = 0$ conţinute în coroana $\Delta(0; 1, 3)$.

Exerciţiul 16. Fie f o funcţie olomorfă pe o vecinătate a discului unitate $\overline{\mathbb{D}}$, astfel că $|f(z)| < 1$ pentru $|z| = 1$. Determinaţi numărul de soluţii în $\overline{\mathbb{D}}$ ale ecuaţiei $f(z) = z^n$, unde $n \in \mathbb{N}^*$, în particular pentru $n = 1$.

Exerciţiul 17. Arătaţi că funcţia $f(z) = z^m + \dfrac{1}{z^m}$, $m \in \mathbb{N}^*$, ia orice valoare nereală din discul unitate $\mathbb{D}$ exact de m ori.

Exerciţiul 18. Arătaţi că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $Rez\left((1 - e^{-z})^{-n}, 0\right) = 1$.

Exerciţiul 19. Fie $a \in \mathbb{C}$ un pol pentru o funcţie f şi fie g o funcţie olomorfă pe o vecinătate a lui a.

a) Arătaţi că $Rez(fg, a) = g(a) Rez(f, a)$.

b) Folosind *(a)*, arătaţi că dacă Ω este un domeniu, $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a_1, \ldots, a_m\})$ astfel că a_k $(1 \leq k \leq m)$ sunt poli simpli pentru f şi dacă $g \in \mathcal{H}(\Omega)$, atunci

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} f(z)g(z)dz = \sum_{k=1}^{m} n(\gamma, a_k)g(a_k)Rez(f, a_k),$$

unde γ este un drum închis parţial neted şi omolog cu zero în Ω şi $a_k \notin S(\gamma)$ pentru $1 \leq k \leq m$.

Exerciţiul 20. Arătaţi că dacă o funcţie raţională f este derivata altei funcţii raţionale, atunci toate reziduurile lui f sunt egale cu zero.

Exerciţiul 21. Calculaţi integralele:

a) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin^2(x)}{5 + 3\cos x} dx;$

b) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{(a + \cos x)^2},\ a \in \mathbb{R},\ |a| > 1;$

c) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3x}{1 - 2\alpha \cos 2x + \alpha^2} dx,\ 0 < \alpha < 1;$

d) $\int\limits_0^{2\pi} \sin(nx) \tan \frac{x}{2} dx,\quad n \in \mathbb{N};$

e) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1};$

f) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\ dx}{(x^2 + a^2)^2 (x^2 + b^2)},\ a, b > 0;$

g) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\ dx}{(x^2 + 1)^2};$

h) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{a^2 - x^2},\ a \in \mathbb{R};$

i) $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x^2 + 1},\ \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \neq 0;$

j) $\int\limits_0^{\infty} \frac{x^3 \cos \alpha x}{x^4 + 1},\ \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \neq 0;$

k) $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^n+1},\ n \in \mathbb{N};$

l) $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} dx;$

m) $\int\limits_0^\infty \frac{x \sin \alpha x}{x^4+a^4} dx,\ \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \neq 0,\ a > 0;$

n) $\int\limits_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{x+1} dx,\ 0 < \alpha < 1;$

o) $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)};$

p) $\int\limits_0^\infty x^{\alpha-1} \ln^m x dx,\ 0 < \alpha < 1,\ m \in \mathbb{N}^*.$

Exerciţiul 22. Verificaţi egalităţile:

a) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos^3 3x}{1-2a\cos x + a^2} dx = \pi \frac{1-a+a^2}{1-a},\ 0 < a < 1;$

b) $\int\limits_0^{2\pi} \ln(\sin^2 2x) dx = 4 \int\limits_0^{\pi} \ln(\sin x) dx = -4\pi \ln 2;$

c) $\int\limits_0^{2\pi} e^{2\cos x} dx = 2\pi \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2};$

d) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{a+\sin^2 x} = \frac{\pi}{2\sqrt{a}(a+1)},\ a > 0;$

e) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^6} = \frac{2\pi}{3};$

f) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx = \frac{\pi}{\sin a\pi},\ 0 < a < 1;$

g) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin \alpha x}{x^4+a^4} dx = \frac{\pi}{a^2} e^{-a\alpha/\sqrt{2}} \sin \frac{a\alpha}{\sqrt{2}},\ a, \alpha \in \mathbb{R},\ a \neq 0;$

h) $\int\limits_0^\infty \frac{\ln x}{(1+x^2)^2} dx = -\frac{\pi}{4};$

i) $\int\limits_0^\infty \frac{\ln^3 x}{1+x^2}dx = 0;$

j) $\int\limits_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x^4}dx = \frac{\pi}{8\sin\frac{\pi\alpha}{4}},\ 0<\alpha<4.$

Exerciţiul 23. Arătaţi că $\int\limits_0^\infty e^{-t^2}\cos t^2 dt = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\sqrt{1+\sqrt{2}}.$

Indicaţie. Procedaţi ca în cazul integralelor lui Fresnel, înlocuind unghiul $\pi/4$ cu $\pi/8$.

Exerciţiul 24. Calculaţi sumele:

a) $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{1}{n^4};$

b) $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n^2+1};$

c) $\sum\limits_{n=0}^\infty \frac{1}{3^{3n}}C_{3n}^n.$

Exerciţiul 25. Verificaţi egalităţile:

a) $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6};$

b) $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12};$

c) $\sum\limits_{n=0}^\infty \frac{1}{5^n}C_{2n}^n = \sqrt{5}.$

Exerciţiul 26. Arătaţi că pentru orice $a \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ avem:

a) $\sum\limits_{n=-\infty}^\infty \frac{1}{(a+n)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2\pi a}$ şi deduceţi că $\sum\limits_{n=0}^\infty \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8};$

b) $\frac{1}{a} + \sum\limits_{n=1}^\infty \frac{2a}{a^2-n^2} = \pi\cot\pi a;$

c) $\frac{1}{a} + \sum\limits_{n=1}^\infty \frac{2(-1)^n a}{a^2-n^2} = \frac{\pi}{\sin\pi a}.$

Exerciţiul 27. Demonstraţi inegalitatea

$$\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^k C_n^k \cdot C_{2n}^k\right| \leqq \left(\frac{16}{3\sqrt{3}}\right)^n, \quad n \geqq 1.$$

Exerciţiul 28. Arătaţi că pentru $|z| < 1/4$ are loc

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_{2n}^n z^n = (1-4z)^{-1/2}.$$

Exerciţiul 29. Arătaţi că $x_n \to 0$ $(n \to \infty)$ unde:

a) $x_n = \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\sqrt{C_n^k}$;

b) $x_n = \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\sqrt[n]{C_n^k}$.

Exerciţiul 30. Exemplu de funcţie întreagă, mărginită pe orice dreaptă care trece prin origine. Considerăm funcţia

$$f(z) = \int_0^\infty \frac{e^{tz}}{t^t}dt \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Integrala converge absolut, deoarece $|e^{tz}t^t| = e^{tx}/t^t$ şi $\int\limits_0^\infty (e^{tx}/t^t)dt$ converge. Funcţia f este continuă pe $\mathbb{C}$. De asemenea, pentru orice dreptunghi închis R avem

$$\begin{aligned}\int_{\partial R} f(z)dz &= \int_{\partial R}\left(\int_0^\infty \frac{e^{tz}}{t^t}dt\right)dz = \\ &= \int_0^\infty \left(\int_{\partial R}\frac{e^{tz}}{t^t}dz\right)dt = \int_0^\infty 0dt = 0,\end{aligned}$$

unde intervertirea ordinii de integrare este bazată tocmai pe convergenţa absolută a integralei improprii. Astfel, prin teorema lui Morera deducem că f este o funcţie întreagă.

Din definiţie rezultă că $f(z)$ este real pentru z real. Deci în virtutea principiului reflexiei al lui Schwarz avem $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ pentru orice z. Acum arătăm că f

este mărginită în semiplanul superior $\{z: \ \text{Im}\ z > \pi\}$, de unde prin remarca anterioară urmează că f este mărginită şi în semiplanul inferior $\{z: \ \text{Im}\ z < -\pi\}$.

Fie ε, $r > 0$ cu $\varepsilon < r$ şi considerăm drumurile $\gamma_\varepsilon(t) = \varepsilon e^{it}$, $\gamma_r(t) = re^{it}$, $t \in [0, \pi/2]$ şi $\gamma^1_{\varepsilon,r} = \overline{\varepsilon r}$, $\gamma^2_{\varepsilon,r} = \overline{ri, \varepsilon i}$ şi $\gamma = \gamma^1_{\varepsilon,r} \cdot \gamma_r \cdot \gamma^2_{\varepsilon,r} \cdot \gamma_\varepsilon^{-1}$. Deoarece $\varphi(w) = e^{wz}/w^w$ este funcţie olomorfă în $\mathbb{C} \setminus \{w \in \mathbb{C}, \ w \leqq 0\}$ (pentru w^w luăm determinarea principală), rezultă că

$$\int_\gamma \varphi(w)dw = 0.$$

Prin urmare obţinem

$$\int_\varepsilon^r \frac{e^{tz}}{t^t}dt = \int_{\gamma_\varepsilon} \varphi(w)dw - \int_{\gamma^2_{\varepsilon,r}} \varphi(w)dw - \int_{\gamma_r} \varphi(w)dw.$$

Acum $\int\limits_{\gamma_\varepsilon} \varphi(w)dw \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$ deoarece $\lim\limits_{w\to 0} \varphi(w) = 1$. Apoi dacă $w = iy$ pentru $y \in [\varepsilon, r]$ avem

$$\left| -\int_{\gamma^2_{\varepsilon,r}} \varphi(w)dw \right| = \left| i\int_\varepsilon^r \frac{e^{iyz}}{(iy)^{iy}}dy \right| \leqq \int_\varepsilon^r \left| \frac{e^{iyz}}{(iy)^{iy}} \right| dy.$$

însă pentru $Im\ z = \pi/2 + c \quad (c > 0)$ obţinem

$$\left| \frac{e^{iyz}}{(iy)^{iy}} \right| = \frac{e^{-y(\pi/2+c)}}{|e^{iy}\log(iy)|} = \frac{e^{-y(\pi/2+c)}}{e^{-y\pi/2}} = e^{-yc}$$

Astfel deducem

$$\left| \int_{\gamma^2_{\varepsilon,r}} \varphi(w)dw \right| \leqq \int_\varepsilon^r e^{-yc}dy = \frac{1}{c}\left(e^{-\varepsilon c} - e^{-rc}\right) \underset{\substack{\varepsilon\to 0\\ r\to\infty}}{\longrightarrow} \frac{1}{c}.$$

în sfârşit, pentru a evalua integrala pe γ_r considerăm $w = re^{i\theta}$, $\theta \in [0, \pi/2]$. Atunci $\log w = \ln r + i\theta$ şi deci

$$\begin{aligned}\left| \frac{e^{wz}}{w^w} \right| &= \left| \frac{exp[(r\cos\theta + ir\sin\theta)(x+iy)]}{exp[(r\cos\theta + ir\sin\theta)(\ln r + i\theta)]} \right| = \\ &= exp[(x - \ln r)r\cos\theta + (\theta - y)r\sin\theta].\end{aligned}$$

Acum pentru r suficient de mare avem $\ln r - x > y > y - \theta$ şi deci

$$\left|\frac{e^{wz}}{w^w}\right| \leqq e^{-(y-\theta)r} \leqq e^{-cr},$$

de unde

$$\int\limits_{\gamma_r} \varphi(w)dw \leqq \frac{\pi}{2} r e^{-cr} \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

în concluzie, pentru $\varepsilon \to 0$ şi $r \to \infty$ obţinem

$$|f(z)| = \left|\int\limits_0^\infty \frac{e^{tz}}{t^t} dt\right| \leqq \frac{1}{c},$$

pentru orice $z \in \mathbb{C}$ cu $\operatorname{Im} z = \pi/2 + c$. Cu remarca de mai sus rezultă că f este mărginită în afara benzii $\{z : \ |\operatorname{Im} z| \leqq \pi\}$.

Acum definim funcţia $g(z) = f(z - 2\pi i)$, $z \in \mathbb{C}$. Atunci g este întreagă şi $|g| \leqq 1$ în afara benzii $\{z : \ \pi \leqq |\operatorname{Im} z| \leqq 3\pi\}$. Deci g este mărginită pe orice dreaptă care trece prin origine.

Exerciţiul 31. Dacă g este funcţia de mai sus, arătaţi că $g(x + 2\pi i) \to \infty$ pentru $x \to \infty$, $x \in \mathbb{R}$.

Exerciţiul 32. Consideraţi integralele

$$I_n = \int\limits_0^\infty e^{-t} t^n dt \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Folosind integrarea prin părţi, arătaţi că $I_n = nI_{n-1}$ şi deduceţi că $I_n = n!$.

Exerciţiul 33. Arătaţi că integrala $\int\limits_0^\infty e^{-t} t^z dt$ converge uniform pentru $\operatorname{Re} z > -1$.

Indicaţie. Avem $|t^z| = |e^{z \log t}| = e^{(\operatorname{Re} z)\log t} = t^{\operatorname{Re} z} \quad (t \geqq 0)$.

Exerciţiul 34. *Funcţia Gamma* este definită prin

$$\Gamma(z) = \int\limits_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \quad (z \in \mathbb{C},\ \operatorname{Re} z > 0).$$

Arătaţi că Γ este funcţie olomorfă în semiplanul drept şi $\Gamma(n) = (n-1)!$ pentru orice $n \in \mathbb{C}^*$. De asemenea, Γ are o singularitate în $z = 0$ deoarece

$$\Gamma(\varepsilon) = \int\limits_0^\infty \frac{e^{-t}}{t^{1-\varepsilon}} dt \to \infty \quad \text{pentru} \quad \varepsilon \to 0^+.$$

Exerciţiul 35.

a) Folosiţi integrarea prin părţi şi arătaţi că

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} \quad (\mathrm{Re}\ z > 0).$$

Această identitate permite să extindem funcţia Γ la semiplanul $\{z : \mathrm{Re}\ z > -1,\ z \neq 0\}$. Această extensie va fi olomorfă pentru $-1 < \mathrm{Re}\ z < 0$. Apoi, deoarece Γ este continuă pe dreapta $\mathrm{Re}\ z = 1$, rezultă

$$\lim_{z\to iy} \Gamma(z) = \lim_{z\to iy} \frac{\Gamma(z+1)}{z} = \frac{\Gamma(iy+1)}{iy} = \Gamma(iy)$$

pentru $y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$, deci Γ este continuă pe axa imaginară exceptând originea. Astfel rezultă că extensia lui Γ este olomorfă pe mulţimea $\{z : \mathrm{Re}\ z > -1,\ z \neq 0\}$. Mai mult, $z = 0$ este un pol simplu pentru Γ şi $Rez(\Gamma, 0) = 1$.

b) Continuând în acest mod, se poate defini

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} = \frac{\Gamma(z+2)}{z(z+1)} \quad (\mathrm{Re}\ z > -2),$$

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+3)}{z(z+1)(z+2)} \quad (\mathrm{Re}\ z > -3), \ldots,$$

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+k+1)}{z(z+1)\ldots(z+k)} \quad (\mathrm{Re}\ z > -k-1)$$

pentru orice $k \in \mathbb{N}$. Arătaţi că întregii nepozitivi sunt poli simplii pentru funcţia (extinsă) Γ şi că

$$Rez(\Gamma, -k) = \frac{(-1)^k}{k!} \quad (k \geqq 1).$$

Exerciţiul 36. Fie $\Gamma(z) = \Gamma_1(z) + \Gamma_2(z)$ unde

$$\Gamma_1(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \Gamma_2(z) = \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Arătaţi:

a) Integrala Γ_2 este uniform convergentă pe $\mathbb{C}$ şi defineşte o funcţie întreagă.

b) Pentru $\text{Re } z > 0$ are loc

$$\begin{aligned}
\Gamma_1(z) &= \int_0^1 \left(1 - t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \ldots\right) t^{z-1} dt \\
&= \int_0^1 t^{z-1} dt - \int_0^1 t^z dt + \int_0^1 \frac{t^{z+1}}{2!} dt - \int_0^1 \frac{t^{z+2}}{3!} dt + \ldots \\
&= \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} + \frac{1}{2!(z+2)} - \frac{1}{3!(z+3)} + \ldots
\end{aligned}$$

Această serie de puteri întregi defineşte o extensie olomorfă a lui Γ_1 la $\mathbb{C}$ exceptând întregii nepozitivi. Deduceţi că

$$Rez(\Gamma, -k) = Rez(\Gamma_1, -k) = \frac{(-1)^k}{k!}, \quad k \geqq 1.$$

Exerciţiul 37. Arătaţi că

$$\Gamma(z) = \lim_{n \to \infty} \int_0^n t^{z-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt \quad (\text{Re } z > 0).$$

Indicaţie. Pentru $k \leq n$, avem

$$o \leqq e^{-t/b} - \left(1 - \frac{t}{n}\right) \leqq \frac{t^2}{2n^2}$$

şi folosind apoi identitatea

$$a^n - b^n \leqq n a^{n-1}(a - b) \quad \text{pentru } \ a > b,$$

rezultă că

$$\left| e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right| \leqq \frac{e^{-t} t^2}{2n}.$$

Exerciţiul 38. Să se construiască funcţia f olomorfă ,$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$, dacă:

1. $u(x, y) = x^2 - y^2 - \dfrac{x}{x^2 + y^2}$, cu condiţia $f(1) = 0$.

Răspuns : $f(z) = z^2 - \dfrac{1}{z}$.

2. $u(x, y) = x \cos y \mathrm{sh} x - y \sin y \mathrm{ch} x$, cu condiţia $f(0) = 0$.

Răspuns :$f(z) = z\mathrm{sh}z$.

3. $v(x, y) = e^{(x^2-y^2)} \sin(2xy)$, cu condiţia $f(0) = 1$.

Răspuns : $f(z) = e^{z^2}$.

4. $v(x, y) = e^{-x}\big(x \sin y - y \cos y\big)$, cu condiţia $f(0) = 0$.

Răspuns : $f(z) = -ze^{-z}$.

5. $u(x, y) = \varphi(x^2 - y^2)$, $\varphi \in C^2$.

Răspuns: Din condiţia de armonicitate a funcţiei $u(x, y)$, obţinem ecuaţia diferenţială $\varphi'(x^2 - y^2) = 0$, de unde $u(x, y) = c_1(x^2 - y^2) + c_2$, iar $f(z) = c_1z^2 + c_3$, unde $c_1, c_3 \in \mathbf{C}$.

6. $v(x, y) = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$, $\varphi \in C^2$.

Răspuns: Notăm $t = \dfrac{y}{x}$. Condiţia $\Delta v = 0$, conduce la rezolvarea ecuaţiei diferenţiale $(1 + t^2)\varphi'(t) + 2t\varphi'(t) = 0$. Separând variabilele şi integrând, obţinem $\varphi(t) = c_1 \arctan(t) + c_2$. Din condiţiile Cauchy-Riemann, rezultă $u(x, y) = c_1 \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + c_3$, de unde $f(z) = c_1\mathrm{Log}(z) + c_3 + ic_2$.

Exerciţiul 39. Dezvoltaţi în serie Taylor în jurul punctului a indicat funcţiile :

1. $f(z) = \dfrac{1}{z-2}, \quad a = i$.

Răspuns : $f(z) = \dfrac{1}{z-i+i-2} = \dfrac{1}{i-2}\dfrac{1}{1+\dfrac{z-i}{i-2}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-i)^n}{(i-2)^{n+1}}$, $|z - i| < \sqrt{5}$.

2. $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - 5z + 6}, \quad a = 1$.

Răspuns: $f(z) = \dfrac{1}{z-3} - \dfrac{1}{z-2} = \dfrac{1}{(z-1)-2} - \dfrac{1}{(z-1)-1} = -\dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z-1)^n}{2^n} + \sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(1 - \dfrac{1}{2^{n+1}}\Big)(z-1)^n$, când $|z-1| < 1$.

3. $f(z) = \cos^2(z), \quad a = 0.$

Răspuns : $f(z) = \dfrac{1+\cos 2z}{2} = \dfrac{1}{2}\Big(1 + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(2z)^{2n}}{(2n)!}\Big).$

Exerciţiul 40. Dezvoltaţi în serie Laurent pe domeniul indicat funcţiile :

1. $f(z) = \dfrac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}, \quad$ D: $0 < |z-2| < \sqrt{5}$, şi D: $1 < |z| < 2$.

2. $f(z) = \dfrac{1}{\sin z}, \quad$ D: $a = 0$.

Răspuns : $f(z) = \dfrac{1}{z\Big(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + ...\Big)} = \dfrac{1}{z}(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ...)$, de unde $(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ...)\Big(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + ...\Big) = 1$. Înmulţinând cele două paranteze şi identificând , obţinem $a_{2k+1} = 0$ şi $a_0 = 1, a_2 = \frac{1}{6}, a_4 = \frac{7}{360}, ...$

3. $f(z) = \mathrm{Log}(z), \quad f(1-i) = \frac{1}{2}\ln 2 + i\frac{15\pi}{4}, \quad a = i.$

Răspuns : Alegem ramura logaritmului care verifică condiţia iniţială , de unde rezultă $k = 2$. Cum $f(z) = f(i) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-i)^n$, derivând, avem $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-i)^{n-1} = \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{z-i+i} = \dfrac{1}{i}\dfrac{1}{1+\frac{z-i}{i}} = \dfrac{1}{i}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(z-i)^n}{i^n}$. Din identificarea coeficienţilor, deducem că $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n i^n}$ şi în plus, $f(i) = \ln(1) + i\Big(\frac{\pi}{2} + 4\pi\Big) = \frac{9\pi}{2}i$. Rezultă $f(z) = \frac{9\pi}{2}i - \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{i^n}{n}(z-i)^n$.

Exerciţiul 41. Calculaţi următoarele integrale cu ajutorul teoremei reziduurilor.

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^4-x^3+1}{1+x^{12}}dx \qquad$ R: $\frac{2\pi}{3}\Big(\cos\frac{\pi}{12} + \sin\frac{\pi}{12}\Big)$.

2. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{(2x^2+1)^3}dx$ R: $\frac{3\pi\sqrt{2}}{32}$.

3. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^{2011}}dx$ R: $\frac{\pi(4020)!}{2^{4020}(2010!)^2}$.

4. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+\cos x}dx, \quad |a|>1$ R: $\frac{2\pi sgn(a)}{\sqrt{a^2-1}}$.

5. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{4-\sin^2 x}$ R: $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$.

6. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{(1-a^2)e^{inx}}{1-2a\cos x+a^2}, \quad , a \in \mathbf{R}, \ |a| \neq 1$

Răspuns : Avem discuţie după a. Astfel, dacă $|a| < 1$, $a \neq 0$, atunci integrala este egală cu $2\pi a^n$, pentru $|a| > 1$, găsim integrala egală cu $-2\pi/a^n$. Pentru $a = 0$, , distingem iar două cazuri, o dată pentru $n \geq 1$, obţinem integrala nulă , iar pentru $n = 0$, rezultatul integralei este 2π.

7. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(3+\cos x)^2}$ R: $\frac{3\pi}{8\sqrt{2}}$.

8. $\displaystyle\int_0^{2\pi} (1-\cos x)^n \sin(nx)dx$ R:0.

9. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x\sin(ax)+\cos(bx)}{x^2+c^2}, \quad a,b,c \in \mathbf{R}_+^\star$ R: $\frac{\pi}{2}(e^{-ac}+\frac{e^{-bc}}{c})$

10. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(\frac{\pi}{2}x)}{x^2+2x+1}$ R: $\pi e^{-\frac{\pi}{2}}$

Exerciţiul 42. Fie funcţia $u(x,y) = \ln(x^2+y^2) + e^x cosy$.

a) Arătaţi că $u(x,y)$ este o funcţie armonică.

b) Construiţi $f(z)$ olomorfă , $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, unde $u(x,y)$ este funcţia precizată în enunţ, cu condiţia $f(1) = e$.

c) Fie $R \in (0,\infty)\backslash(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2})$. Calculaţi integrala

$$I = \int_{|z-\frac{1}{2}|=R} \frac{f(z) - 2\mathrm{Log}z}{z^2(z+i)}dz$$

Răspuns : b) $f(z) = 2\mathrm{Log}z + e^z$

c) Distingem 3 cazuri : $R < \frac{1}{2}$, când integrala este 0 , $\frac{1}{2} < R < \frac{\sqrt{5}}{2}$, când se obţine $I = 2\pi i(1-i)$, şi ultimul caz, $R > \frac{\sqrt{5}}{2}$, valoarea integralei fiind $I = 2\pi i[1 - \cos 1 + i(\sin 1 - 1)]$.

Exerciţiul 43. a) Să se determine $\{z \in \mathbb{C} | \cos z = \frac{5}{4}\}$.

b) Să se calculeze $I = \displaystyle\int_{|z-i|=1} \frac{dz}{5 - 4\cos z}$.

Răspuns a) $\{\pm i \ln 2 + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$

b) Se iau în calcul doar punctele singulare din interiorul domeniului mă rginit de drumul $|z - i| = 1$, respectiv $z = i \ln 2$. Calculul integralei cu teorema reziduurilor conduce la rezultatul $I = \frac{2\pi}{3}$.

Exerciţiul 44. Fie $f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$, cu $a_i \in \mathbb{C}$, $i = 0, 1, ..., n$.

a) Să se calculeze $I_k = \displaystyle\int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^k} dz$ şi $J_k = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) e^{-ikt} dt$, pentru $1 \leq k \leq n$.

b) Dacă toţi $a_k \in \mathbb{R}$, să se arate că

$$\int_{-1}^{1} f^2(x)dx = -i \int_0^{\pi} f^2(e^{it})e^{it}dt.$$

Răspuns a) $I_k = 2\pi i a_{k-1}$, $J_k = 2\pi i a_k$.

b) Demonstrăm că $\displaystyle\int_{-1}^{1} f^2(x)dx = -i \int_0^{\pi} f^2(e^{it})e^{it}dt$. Fie $\gamma : |z| = 1$, $\text{Im}z > 0$. Atunci, conform teoremei fundamentale Cauchy, avem $\displaystyle\int_\gamma f^2(z)dz + \int_{-1}^{1} f^2(x)dx = 0$, de unde

$$\int_{-1}^{1} f^2(x)dx = -\int_\gamma f^2(z)dz = -\int_0^{\pi} f^2(e^{it})ie^{it}dt = -i\int_0^{\pi} f^2(e^{it})e^{it}dt.$$

Exerciţiul 45. Fie $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clasă C^2, $v(x, y) = \varphi(x^2 - y^2)$.

a) Să se determine φ, astfel încât v să fie armonică.

b) Determinaţi funcţia f olomorfă, pentru care $Im(f) = v(x, y)$.

c) Calculaţi $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{f(z) \cdot \sin z}{z^2} dz$.

Răspuns a) $v(x, y) = C_1(x^2 - y^2) + C_2$

b)$f(z) = z^2 i C_1 + C_3$

c) Folosind teorema fundamentală Cauchy, obţinem $\int_{|z|=1} \frac{(z^2 iC_1 + C_3)\sin z}{z^2} dz = \int_{|z|=1} iC_1 \sin z dz + \int_{|z|=1} C_3 \frac{\sin z}{z^2} dz = C_3 \int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^2} dz$. Pentru $g(z) = \frac{\sin z}{z^2}$, avem $\lim_{z\to 0} g(z) = \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z}\frac{1}{z} = \infty$, deci $z = 0$ este pol de ordinul 1. Prin urmare $\frac{\sin z}{z^2} = \frac{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!}\cdots}{z^2} = \frac{z}{z^2} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} + \ldots$, deci $c_{-1} = 1$ şi deci $\int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^2} dz = 1$. Rezultatul este $0 + C_3 = C_3$.

Exerciţiul 46.

a) Să se determine funcţia olomorfă $f(z) = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$, $z = x + iy$, ştiind că $u(x,y) = \varphi(x^2 - y^2)$, şi $f(0) = 0$, $f(i) = -1$.

b) Fie $g(z) = \frac{f(z)\cdot e^{2/z}}{z^2 - z}$. Să se calculeze $Rez(g,1)$.

c) Să se calculeze $Rez(g,0)$.

d) Să se calculeze $\int_{|z|=2} g(z)dz$.

Răspuns.

a) $f(z) = z^2$.

b) e^2.

c) $3 - e^2$.

d)$6\pi i$.

Exerciţiul 47. Construiţi $f(z)$ olomorfă , $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, unde $u(x,y) = \cos x \mathrm{sh} y$, $f(0) = 1$ şi calculaţi $\int_0^{2\pi} (1 - f(x))^n f(nx)dx$, $n \geq 0$.

Răspuns. $f(z) = \cos z$ şi rezultatul integralei este $\frac{(-1)^n \pi}{2^{n-1}}$.

Exerciţiul 48. Rezolvaţi următoarele integrale complexe cu ajutorul reziduurilor.

1. $\int_{|z-i-1|=\sqrt{5}} \frac{z}{z^3+1} dz$ R:$\frac{2\pi i}{3}$

2. $\int_{|z-2|=r} \frac{z\sin(\frac{\pi z}{3})}{(z-3)^{2n+1}} dz$ R: $\frac{2\pi i}{(2n)!}[(\frac{\pi}{3})^{n-1}(-1)^n(\frac{n}{2} + \frac{\pi}{\sqrt{3}})]$

3. $\int_{|z|=r} e^{\frac{1}{z}} \cos\frac{1}{z} dz$ R:$2\pi i$

4. $\displaystyle\int_{|z+1|=1} \frac{z^{2n}}{(z+1)^n} dz$ R: $2\pi i C_{2n}^{n-1}(-1)^{n+1}$

5. $\displaystyle\int_{|z|=r} \frac{z^n}{z^n+3^n} dz, \quad r \neq 3$

Răspuns. Dacă $0 < r < 3$, atunci integrala este 0. Dacă $r > 3$, toţi polii funcţiei $z_k = 3e^{i\frac{(2k+1)\pi}{n}}$ (poli simpli) sunt situaţi în interiorul domeniului ce mărgineşte curba $|z| = r$. Reziduul funcţiei în polul z_k este $\frac{z_k}{nz_k^{n-1}} = \frac{z_k^2}{nz_k^n} = -\frac{z_k^2}{n3^n}$, şi folosind relaţiile lui Vietè, găsim $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} z_k^2 = 0$, de unde rezultă imediat valoarea integralei egală cu 0.

6. $\displaystyle I = \int_{0,25x^2+0,16y^2=0,04} \frac{\tan z}{z^2(z^2+1)} dz$ R: $2\pi i$

7. $\displaystyle\int_{x^2+y^2+2x=0} z^2 \cdot e^{2z/(z+1)} dz$ R:$-\frac{44\pi i e^2}{3}$.

8. $\displaystyle\int_{|z|=r, r>1} z^2 e^{\frac{1}{z-1}} dz$ R: $\frac{13\pi i}{3}$

Bibliografie

[1] Ahlfors L.V., *Complex Analysis*, Mc Graw - Hill New York, 1966.

[2] Andreian - Cazacu C., (ed.), *Analiză complexă. Aspecte clasice şi moderne*, Ed. Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1988.

[3] Angheluţă Th., *Curs de teoria funcţiilor de variabilă complexă*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1957.

[4] Blezu D., Acu M., *Analiză complexă. Probleme. vol.I şi II*, 2000.

[5] Boboc N., *Funcţii complexe*, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1969.

[6] Bulboacă T., Salamon J., Eniko N., Oros Gh., Oros G.I., *Probleme de Analiză complexă I*, Editura Univ. Oradea, 2007.

[7] Călugăreanu G., *Elemente de teoria funcţiilor de o variabilă complexă*, Ed. Did. şi Ped., Bucureşti, 1963.

[8] Ceauşu T., Suciu N., *Funcţii complexe. Probleme şi exerciţii*, Editura Mirton, Timişoara, 2001.

[9] Hamburg P., Mocanu P.T., Negoescu N., *Analiză matematică(Funcţii complexe)*, Ed. Did. şi Ped., Bucureşti, 1982.

[10] Homentcovschi D., *Funcţii complexe cu aplicaţii în ştiinţă şi tehnică*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1986.

[11] Kohr G., Mocanu P.T., *Capitole speciale de analiză complexă*, Presa Universitară Clujeană, Cluj-Napoca, 2005.

[12] Lang S., *Complex Analysis*, Addison-Wesley, Readmiq, 1977.

[13] Mayer O., *Probleme speciale de teoria funcţiilor de o variabilă complexă*, Editura Academiei, Bucureşti, 1980.

[14] Mayer O., *Teoria funcţiilor de o variabilă complexă*, Ed. Academiei R.S.R., Bucureşti, 1981.

[15] Mocanu G.H., Stoican Gh., Vişinescu, *Teoria funcţiilor de o variabilă complexă(Culegere de probleme)*, Ed. Did. şi Ped., Bucureşti, 1970.

[16] Mocanu P.T., *Funcţii complexe*, Partea I, Cluj, 1972.

[17] Mocanu P.T., Oros Gh., *Funcţii complexe*, Editura Universităţii din Oradea 2001.

[18] Mocanu P.T., Breaz D., Oros G.I., Oros Gh., *Analiză complexă*, Editura Aeternitas, Alba Iulia, 2009.

[19] Rudin W., *Real and Complex Analysis*, Third Edition, Mc Graw-Hill, Inc., New York, 1987.

[20] Sălăgean Şt. G., *Geometria planului complex*, Promedia-plus, Cluj Napoca, 1997.

[21] Stoilow S., *Teoria funcţiilor de o variabilă complexă*, vol.I, II, Editura Academieie, Bucureşti, 1954-1958.

[22] Stoilow S., *Teoria funcţiilor de variabilă complexă*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1962.

[23] Stoka M.I., *Funcţii de variabile reale şi funcţii de variabile complexe*, Ed. Did. şi Ped., Bucureşti, 1964.